Digitized by Google

11.1.158

Digitized by Google

SCIENTIA NAVALIS

SEV

TRACTATVS

DE

CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS

NAVIBVS

PARS PRIOR

COMPLECTENS

THEORIAM VNIVERSAM
DE SITV AC MOTV
CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

*INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.*

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
CIↄ IↄCCXLIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXCELLENTISSIMO ATQVE ILLVSTRISSIMO
ACADEMIAE PRAESIDI

CYRILLO GREGORII F.
COMITI DE RASVMOVSKI

SACRAE IMPERATORIAE
MAIESTATIS
CVBICVLO PRAEFECTO,

COHORTIS PRAETORIAE ISMAILOVENSIS
PROTRIBVNO,

ORDINVM EQVESTRIVM AQVILAE ALBAE,
S. ALEXANDRI ET S. ANNAE
EQVITI.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLVSTRISSIME COMES

DOMINE GRATIOSISSIME!

NAuigationis Scientia iam pridem inter mathematicas disciplinas referri eſt coepta, vbi quidem Hydrographiae nomine occurrere ſolet. Hic ſcilicet imprimis ratio mapparum nauticarum exponitur, vna cum doctrina de rhumbis lineisque loxodromicis, vnde regulae vtiliſſimae eliciuntur curſum nauium ita dirigendi, vt ad locum propoſitum aduehantur: quorſum quoque perti-

)(2 nent

Digitized by Google

nent inſtructiones naucleris tradi ſolitae, quibus ad latitudinem loci, vbi verſatur ex altitudinibus ſolis vel ſtellarum definiendam, curſumque nauis aeſtimandum inſtituuntur. Verum haec nauigationis pars ita accurate paſſim eſt tractata, vt in hoc opere, quod Tuis, *Comes Illuſtriſſime* auspiciis in lucem producitur, eam attingere plane ſuperfluum fuiſſet.

Hic enim longe aliud inſtitutum perſequi eſt viſum, quod in re nauali non minus maximi eſt momenti, et quod adhuc parciſſime eſt tractatum. Namque in praeſenti opere non tam ad curſus, quem nauis tenere debet, directionem reſpicio quam ad ipſam nauium fabricam et exſtructionem, vt ad eum finem, cui ſunt deſtinatae, maxime ſint accommodatae. Quae tractatio vt commode ſuſcipi queat, ante omnia neceſſe eſt, vt quemadmodum quaeuis nauis in omni ſtatu, cui exponitur, ſeſe ſit habitura, diligenter inueſtigetur. Duo autem hic

prae-

praecipue ſe offerunt ſtatus, in quibus nauis eſt conſideranda, alter quietis alter motus, in quorum vtroque plurima occurunt notanda, ſine quibus indoles nauium omnino perfecte cognoſci nequit, et quae plerumque profundiſſimas analyſeos inueſtigationes requirunt. Primum igitur nauem in ſtatu quietis examini ſubiicere conuenit, dum ſine motu aquae inſidit ſeque ad ſtatum aequilibrii compoſuit. Certum itaque nauis in aqua tenebit ſitum, cuius ratio ex praeceptis hydroſtaticae eſt explicanda; vnde conſtat tantam nauis partem aquae immergi, donec aequalis aquae moles totius nauis pondus adaequet, ex quo ſtatim elicitur modus facilis pondus cuiusque nauis explorandi: menſuretur enim ſecundum praecepta ſtereometrica capacitas partis nauis aquae ſubmerſae, et calculo definiatur quantum pondus habiturum ſit aequale aquae volumen, quod ipſi nauis ponderi erit aequale. Verum ad hoc, vt nauis

vis in aequilibrio ſubſiſtat, non ſufficit partem eius ſubmerſam tantae eſſe capacitatis, ſed alia praeterea requiritur conditio, ad quam intelligendam duo puncta ſunt notanda, quorum alterum eſt centrum grauitatis totius nauis, alterum vero centrum grauitatis partis ſubmerſae, quod haec pars eſſet habitura, ſi tota ex materia vniformi veluti aqua conſtaret; hocque poſterius punctum, quia tantum a magnitudine pendet, centrum magnitudinis partis ſubmerſae appello. Iam vt nauis in aequilibrio perſiſtat, praeter illam determinatam partis ſubmerſae quantitatem requiritur, vt ambo haec centra, alterum grauitatis totius nauis, alterum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem lineam rectam perpendicularem ſeu verticalem cadant. His duabus proprietatibus ſitus aequilibrii ita perfecte determinatur, vt viciſſim aſſeuerare liceat, quoties tanta nauis pars, quantam ante diximus, aquae fuerit immerſa, ſimulque

am-

ambo illa centra in eadem linea recta verticali reperiantur, toties nauim in aequilibrio eſſe futuram. Veritas huius propoſitionis ex primis mechanicae principiis euincitur: primo enim ſpectanda eſt vis, qua nauis deorſum vrgetur, quae ipſius ponderi eſt aequalis, cuiusque directio eſt recta verticalis per eius centrum grauitatis tranſiens; hac ſcilicet vi nauis re ipſa deorſum laberetur, niſi ab aqua ſuſtentaretur. Qua autem parte navis aquae eſt ſubmerſa, ibi ab aqua ſurſum vrgetur, atque tota vis aquae hinc oriunda, qua nauis ſurſum pellitur, aequalis eſt ponderi maſſae aquae, cuius volumen parti nauis ſubmerſae aequatur, eiusque directio eſt recta verticalis per centrum magnitudinis huius partis ſubmerſae tranſiens. Cum igitur ad aequilibrium requiratur, vt hae duae vires ſint inter ſe aequales et directe contrariae, manifeſtum eſt hoc euenire, ſi primo tanta nauis pars aquae immergatur, quae volumine adaequet

mal-

Digitized by Google

maſſam aqueam toti naui pondere aequalem: tum vero ambo illa ante deſcripta centra in eandem rectam verticalem incidant: per prius enim efficitur, vt duae illae vires, quibus nauis vrgetur, fiant inter ſe aequales, per poſterius autem, vt ſibi e diametro fiant contrariae. Atque haec ſunt fere, quae iam ab Archimedis temporibus de ratione ſitus aequilibrii corporum aquae inſidentium fuerunt cognita, quae etſi in nauium doctrina maximae ſunt vtilitatis, tamen ad eam ſitus aequilibrii cognitionem, quae in nauibus potiſſimum deſideratur, minime eſt ſufficiens. Cum enim nauis a fluctibus aliisque cauſis continuo de ſitu aequilibrii deturbetur, plurimum intereſt noſſe vtrum ſeſe ſponte eo reſtituat nec ne? atque imprimis requiritur, vt quanta vi haec reſtitutio fiat, accurate definiatur. Quae quo clarius perſpiciantur, ſimiles caſus in corporibus ſolidis perpendiſſe iuvabit. Conus baſi ſua tabulae inſiſtens non

non ſolum in ſitu ſuo permanet, ſed etiam ſi parumper inclinetur, ſponte ſe erigit; verum etiam fieri poteſt vt idem conus tabulae cuspide impoſitus aequilibrium teneat, at ſimulac vel leuiter tangatur, prolabetur. Vtroque quidem caſu conus in aequilibrio ſtare dicitur, verum inter hos duos ſtatus aequilibrii maximum discrimen intercedit, dum prior ſtabilitate eſt praeditus, alter autem ad labendum ſit procliuis. Simile omnino diſcrimen locum habet in corporibus, quae aquae incumbunt, alia enim ſtatum ſuum aequilibrii ita firmiter tenent, vt etiamſi inde declinentur, tamen continuo eo reuertantur: alia vero, veluti ſi baculus aquae perpendiculariter immittatur, quo ſitu in ſumma quidem tranquillitate perſiſtere poſſet, a minima vi prolabuntur. Hinc igitur grauiſſimum oritur diſcrimen inter varios aequilibrii ſtatus, ex quo alii ſtabiles alii vero labiles vocantur: corporis ſcilicet aquae

inſidentis ſtatus aequilibrii erit ſtabilis, ſi corpus ſtatim ac paulisper inclinetur, ſeſe in eundem ſitum reſtituat; contra vero ſi corpus poſt quampiam inclinationem procumbat, eius aequilibrii ſitus labilis dicitur. Etſi igitur vtrique huic aequilibrii generi ambae ſupra memoratae proprietates ſunt communes, tamen ſua natura tantopere inter ſe diſcrepant, vt, cum de nauibus agitur ad hoc diſcrimen ſit potiſſimum attendendum. Non ſolum enim naues huius indolis eſſe oportet, vt aquae ſitu erecto immiſſae aequilibrium ſeruent, ſed etiam vel maxime vt iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, nauesque, vbi fuerint inclinatae, vi ſeſe in ſitum erectum reſtituendi ſint praeditae. Deinde etiam hi ipſi aequilibrii ſtabiles ſtatus plurimum inter ſe quantitate differunt, prouti in aliis reſtitutio promtius in aliis lentius abſoluitur, ex quo eiusmodi ſtabilitatis notionem adipiscimur, qua eam ad determinatas menſuras revocari debere

Digitized by Google

bere intelligimus: atque hinc concludimus, vt cuiusque nauis ſtatus aequilibrii maxime ſit ſtabilis, ita eam reliquis maxime praeſtare. Verum ex characteribus ante expoſitis, quibus aequilibrii ſitus continetur, minime diiudicare licet, vtrum propoſitus aequilibrii ſitus nauis aquae inſidentis ſtabilis ſit futurus nec ne? multo minus inde ipſe ſtabilitatis gradus definiri poterit; quae tamen res in ſcientia nauali ita eſt maximi momenti, vt ſine ea nauigatio nullo modo tuta eſſe queat. Architecti quidem nauales longa experientia edocti ita naues fabricari didicerunt, vt plerumque ſufficienti ſtabilitatis gradu ſint praeditae, etiamſi nonnunquam in hoc ipſo non leuiter decipiantur; verum tamen ne per experirientiam quidem eas res enumerare, et accurate definire valent, quibus naui ſtabilitas conciliatur. Hunc defectum in architectura nauali ſummi momenti primus accuratius perſpexiſſe videtur vir Gallus

in hoc negotio verſatiſſimus Dominus de la Croix, qui in duobus opuſculis, quae circa annum 1736 *de mechanismo motus corporum aquae inſidentium* cum Academia Scientiarum Imperiali communicauit, non ſolum hunc defectum luculenter indicavit, ſed etiam eundem ſupplere pro viribus eſt conatus. Quanquam autem ſpeculationes, quas in hunc finem expoſuit, negotium minime conficere ſtatim ſunt viſae: tamen dignitatem huius argumenti tam dilucide demonſtrauit, vt ab eo tempore omnibus viribus in eo euoluendo laboraverim. Primum igitur ea mechanicae principia, quibus ſtabilitatis determinationem inniti perſpexeram, diligentius ſum perſcrutatus, indeque mox quicquid ad hanc rem pertinere videbatur, feliciter ſum aſſecutus. Ad hoc autem problema totam hanc disquiſitionem perduxeram, vt propoſita vi, quae navem de ſuo aequilibrii ſitu inclinare conatur, angulum definirem, ad quem na-

Digitized by Google

vis reuera inclinari debeat. Hic quidem primo ratio erat habenda illius axis, circa quem inclinatio ſit futura, aliam enim inclinationem produci debere manifeſtum eſt, ſi nauis proram puppimue verſus ſit inclinanda, aliam, ſi ad alterutrum latus, vel in aliam quamuis regionem obliquam: deinde quoque perſpicuum eſt effectum inclinationis non tam pendere a quantitate vis inclinantis, quam ab eius momento, ad illum axem, circa quem fit inclinatio, vel potius ad axem huic parallelum per nauis centrum grauitatis transeuntem applicato. Quibus notatis inueni inclinationem partim a diſtantia centrorum grauitatis nauis et magnitudinis partis ſubmerſae pendere, partim ab amplitudine eius nauis ſectionis, quae ſecundum aquae ſuperficiem ſit facta. Tum vero intellexi, quamdiu inclinationes ſint ſatis exiguae, eas ceteris paribus ipſis vis inclinantis momentis eſſe proportionales. Quare cum ſtabilitas eo maior cenſeri de-

beat, quo minus nauis a data vi inclinetur, vel quo maior vis requiratur ad datam inclinationem naui inducendam, ſtabilitatem eiusmodi quantitate expreſſi, vt ſi momentum vis inclinantis per eam diuidatur, quotus ipſum angulum inclinationis ſit indicaturus: hocque modo ſtabilitatis menſura mihi eſt quantitas virium momentis homogenea, ideoque productum ex vi quadam in lineam quandam rectam. Ad hunc ergo modum ſi cognita fuerit ſtabilitas nauis pro quocunque axe, circa quem inclinatio efficitur, ex ea ſtatim ipſa inclinatio, quae naui a quacunque vi data inducetur cognoſci poterit, haecque ſine dubio eſt maxime naturalis, atque ad vſum aptiſſima ratio ſtabilitatem cuiusque navis aeſtimandi. Cum autem ſtabilitas ad inclinationem referatur, nauis autem potiſſimum vel ſecundum longitudinem vel latitudinem inclinationem patiatur, duplex ſtabilitas in omni naui praecipue

eſt

eſt conſideranda, quarum altera inclinationi ſecundum longitudinem, altera vero inclinationi ad latera reſiſtit: duplici vero hac ſtabilitate cognita regulam elicui, cuius ope ſtabilitas nauis reſpectu vniuscuiusque inclinationis mediae obliquae definiri poteſt. Vnde cum cuiusque nauis longitudo latitudinem multum ſuperare ſoleat, hoc meminiſſe iuuabit, in qualibet naui ſtabilitatem ſecundum longitudinem eſſe maximam. Stabilitatem vero ſecundum latitudinem minimam, ſeu naves proram puppimue verſus difficillime, ad alterutrum latus vero facillime inclinari. Ex formulis igitur, quas pro ſtabilitate nauium exhibui a priori cognoſcere licet, quantum quaeuis nauis a datis viribus inclinari debeat, vnde ſi a viribus, quibus nauis exponitur, maior inclinatio produci deprehendatur, quam nauis ſine damno pati queat, hoc incommodum in tempore praecaueri poterit, propterea quod dilucide expoſui, quibus rebus ſtabili-

Digitized by Google

bilitas nauis augeri queat. Tribus autem hoc modis effici poſſe oſtendi: primo enim ſi totius nauis centrum grauitatis in humiliorem locum deprimatur, quod fit grauioribus oneribus in profundiora loca translocandis, ſtabilitas nauis augetur, deinde idem effectus obtinetur, ſi partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſurſum eleuetur, de quo in ipſa nauium conſtructione eſt proſpiciendum, ne navis nimis profunde aquae immergatur. Tertium remedium nauis ſtabilitatem augendi in amplitudine nauis ad aquae ſuperficiem eſt poſitum, ita vt quo amplior nauis in hac regione efficiatur, eo maior eius ſtabilitas euadat. Ita ſi nauis inclinationi ad latera non ſatis reſiſtat, nauim ſecundum latitudinem ampliorem effici conueniet, quod nauim nouis parietibus obducendo fieri ſolet.

Cum igitur hanc de ſtabilitate doctrinam accurate eſſem perſecutus, cum ea vniuerſam ſcientiam naualem tam ar-

ctis

Digitized by Google

ctis vinculis connexam ſenſi, vt non ſolum ſine hac doctrina nihil plane in hac ſcientia praeſtari poſſe intelligerem, ſed etiam ea ſtabilita viam ad reliquas huius ſcientiae partes pertractandas patefactam viderem. Conſilium itaque cepi primaria difficultate feliciter ſuperata totam hanc diſciplinam naualem omni ſtudio euoluendi, atque ad certam ſcientiae formam reuocandi, vnde iſtud opus eſt natum. Cum igitur explorare conſtituiſſem, quemadmodum nauis antequam ad curſum incitatur, in ſtatu quietis ſe ſit habitura, expoſita ſtabilitatis theoria ipſas inclinationes, quae naui a quibuscunque cauſis inducuntur, accuratius ſum contemplatus, motusque quibus nauis ex ſitu inclinato in ſitum aequilibrii ſe recipit, ſum perſecuratus. Hos motus ad ſimilitudinem oſcillationum penduli abſolui debere comperi motumque iſtum oſcillatorium, qui vel ſecundum longitudinem nauis fieri ſolet, vel ſecundum la-

Digitized by Google

titudinem, ita per calculum determinaui, vt quouis caſu longitudinem penduli ſimplicis aſſignauerim, quod aequis temporis interuallis ſuas oſcillationes perageret. Non exigui eſt momenti haec inueſtigatio in ſcientia nauali, cum in nauigatione non ſolum plurimum interſit hunc motum oſcillatorium noſſe, quibusque rebus intendi remmittiue queat, perſpectum habuiſſe, ſed etiam obſeruata duratione harum oſcillationum, plura momenta ad nauim pertinentia inde cognoſci poſſunt, quorum notitia ad reliquas nauium proprietates indagandas maxima ſubſidia affert.

His expoſitis ad curſum nauium examinandum ſum progreſſus, vbi primum reſiſtentia, quam nauis ab aqua patitur, inueſtiganda occurrit. Quod argumentum etſi iam ab aliis ſatis accurate eſt pertractatum, tamen ad meum inſtitutum data opera ex primis principiis explicare eſt viſum, vbi praecipue ad duplicem

na-

Digitized by Google

nauis motum reſpexi; quorum alter curſus nauis directus vocari ſolet, quo navis ſecundum longitudinem ſeu directionem ſpinae promouetur, alter vero curſus vocatur obliquus, quo directio motus differt a directione ſpinae, ſeu lineae rectae a puppi ad proram productae: curſum autem obliquum naues vento propulſae potiſſimum ſequuntur, cum vela ad ventum excipiendum oblique expanduntur. Vtroque curſu reſiſtentia aquae a figura nauis anteriori pendet, qua contra aquam impingit, et cum vis reſiſtentiae ad ſingula ſuperficiei nauis puncta ſit perpendicularis, totam reſiſtentiae vim ad ternas vires reuocaui, quarum primae directio eſt horizontalis, et ſpinae nauis parallela, alterius directio quoque horizontalis et ad illam normalis, quae tantum in curſu obliquo locum habet, dum in directo euaneſcit, tertiae denique vis ex reſiſtentia reſultantis directio eſt verticalis, qua nauis ſurſum vrgetur. Hoc lo-

co regulas tradidi, quarum ope, ſi cognita fuerit figura partis nauis anterioris, ſingulae hae tres vires a reſiſtentia oriundae definiri queant, quas ceteris paribus quadrato velocitatis, qua nauis in aqua promouetur, proportionales eſſe conſtat. Iam igitur eo erat peruentum, vt qualem effectum hae tres vires in nauim exerant, eſſet inquirendum quae indagatio quo latius pateret, indeque ſimul omnium virium, quibus nauis in omni ſtatu ſollicitetur, effectus colligi queant, hoc argumentum copioſius omni cura pertractaui. Cuius ratio quo facilius perſpici queat, ante omnia notandum eſt, omnes motus, qui in naui ineſſe poſſunt, ad duo genera referri debere. Prioris generis motus vocatur progreſſiuus, quo tota nauis ſimul ita promouetur, vt eius ſitus ſibi perpetuo maneat parallelus, cuiusmodi motus duplex in nauim cadere poteſt alter ſecundum directionem horizontalem, alter ſecundum verticalem, quorum

rum ille quidem praecipue ſpectatur, ac prout ſiue ſecundum nauis directionem fiat, ſiue ab ea declinet, vel curſus directus appellari ſolet vel obliquus: motus autem verticalis, quo nauis vel ex aqua magis extollitur, profundiusue immergitur, rariſſime occurrit, ideoque vix attingi meretur. Poſterius genus complectitur motus gyratorios vel rotatorios, quibus nauis circa quempiam axem per eius centrum grauitatis transeuntem convertitur; hique motus vel ſeorſim in navi ineſſe poſſunt ſine motu progreſſiuo, vel coniunctim cum motu progreſſiuo. Plures autem ſpecies huiusmodi motuum ſunt notandae pro diuerſitate axium, circa quos fit motus gyratorius, imprimis vero hic diſtinguendi ſunt axes horizontales ab axe verticali, ſi enim nauis circa axem quempiam obliquum vertatur vel inclinetur, eius motus reſolui poteſt in duos; quorum alter circa axem horizontalem fiat, alter circa verticalem. Simi-

li quoque modo omnes axes horizontales ad duos reuocantur; quorum alter ſecundum longitudinem nauis, alter ſecundum latitudinem per centrum grauitatis traiicitur; motus enim, qui circa alium axem horizontalem fieret, in hos duos reſoluere liceret. Hinc igitur triplex motus gyratorius exiſtit, quorum primus fit circa axem longitudinalem, quo nauis ad alterutrum latus inclinatur: ſecundus fit circa axem latitudinalem, eoque nauis vel proram verſus vel puppim verſus inclinatur: vtroque non tam motum, quo inclinatio efficitur, quam ipſam inclinationem, quae naui a quibuscunque viribus inducitur, inueſtigari conuenit, quoniam iſte effectus ſtatim producitur, parumque intereſt noſſe, quonam motu is fuerit productus; ob ſtabilitatem enim nauis motus ſtatim ceſſat, et nauis in ea inclinatione, cui efficiendae vires inclinantes pares fuerint, perſiſtit. Aliter autem eſt comparata ratio tertii motus rotato-

Digitized by Google

tatorii, qui ſit circa axem nauis verticalem, quo tota nauis in gyrum agitur, et qui tamdiu durat, quamdiu nauis a viribus tali motui producendo paribus ſollicitatur, huc imprimis pertinet motus, qui naui a gubernaculo induci ſolet, verum etiam de reliquis viribus, quibus navis vrgetur, plurimum intereſt eas contemplari quae naui ſimilem motum imprimere valeant. Cum igitur nauis a viribus quibuscunque fuerit ſollicitata, praecepta dedi ac dilucide expoſui, quorum ope omnes motus et inclinationes ab illis viribus oriundae facili opera dignoſci et determinari queant. Quod enim primo ad motum progreſſiuum attinet, omnes vires, quibus nauis ſollicitatur ſecundum ſuas quaeque directiones in ipſum centrum grauitatis ſunt tranſerendae, omnesque ſecundum ſtaticae praecepta in vnam colligendae vel in duas quarum alterius directio ſit horizontalis alterius verticalis, haec poſterior eundem praeſtabit

ſtabit effectum, prout vel ſurſum agat vel deorſum ac ſi pondus nauis tantumdem ſiue decrementum ſiue augmentum accepiſſet; nauisque proinde vel ex aqua magis eleuabitur, vel magis immergetur. Ex horizontali autem vi verus na, vis motus progreſſiuus ita definietur ſecundum praecepta mechanica, vt vis haec per maſſam ſeu pondus totius nauis diuiſa praebeat accelerationem motus ſecundum eam directionem, in quam vis vrget; vnde ſi huius vis directio, motus, quem nauis iam habet, directioni ſit vel ſecunda vel aduerſa vel obliqua, motus nauis vel acceleratio vel retardatio vel inflexio definiri, ideoque motus continuatio determinari poterit. Ad inclinationem nauis ab iisdem viribus oriundam et primo quidem circa axem longitudinalem inueniendam, ſingularum virium momenta reſpectu huius axis in vnam ſummam colligantur, quae per ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem

dem

Digitized by Google

dem axis diuiſa praebebit angulum inclinationis, arcum ſcilicet, qui eius exiſtit menſura in circulo, cuius radius vnitati aequalis aſſumitur: ſimilique modo inclinatio circa axem latitudinalem elicitur. Pro motu gyratorio nauis circa axem verticalem per eius centrum grauitatis ductum, pariter ſingularum virium momenta reſpectu huius axis colligantur, haecque momentorum ſumma per momentum inertiae totius nauis reſpectu eiusdem axis diuiſa dabit accelerationem motus huius gyratorii. Momentum autem inertiae nauis reſpectu cuiuspiam axis voco id aggregatum, quod inuenitur, ſi ſingulae nauis partes ratione ſui ponderis per quadrata diſtantiarum ſuarum ab eo axe multiplicentur, haecque producta omnia in vnam ſummam coniiciantur. His poſitis a reſiſtentia primum motus nauis impeditur, qui eſt praecipuus eius effectus, a quo nomen inuenit, deinde a vi verticali ex reſiſtentia

reſultante nauis ex aqua parumper attollitur et quaſi leuior redditur tum vero plerumque puppim verſus reclinatur, atque in curſu obliquo etiam tam inclinatio circa axem longitudinalem ſeu ad latera, quam conuerſio circa axem verticalem inde oriri poteſt, qui effectus quemadmodum quouis caſu ſe habeant, diſtincte expoſui. Verum vis reſiſtentiae non ſeorſum ſed cum omnibus viribus, quibus nauis impellitur coniunctim conſiderari debet, vt inde veri nauis motus colligi queant. Hancobrem vires, quibus vulgo naues propelli ſolent, in computum erant ducendae, quae duplicis potiſſimum ſunt generis, vires ſcilicet venti et vires remorum, de quorum vtroque genere ſeorſim erat agendum. Primum igitur naues, quae per ventum velorum ope propelluntur, ad examen reuocaui hique iis, quae de vi venti in genere erant notanda, praemiſſis, quantam vim quodque velum a vento excipiat, accuratius

ratius determinaui, quo loco ſimul curvatura, quae velis a vento imprimitur, definienda occurrit, quoniam ab ea quoque quantitas vis exceptae pendet. Tum vero ad malos ſum progreſſus, ex quorum numero et ſitu tam quantitas omnium virium a vento exceptarum, quam earum directio colligi debet, vbi iterum duo caſus ſunt perpendendi, alter quo directio vis a vento exceptae directioni nauis eſt parallela, quo caſu curſus navis directus inſtituitur; alter vero, quo directio illa ab hac declinat, vnde curſus obliquitas exiſtit. In curſu igitur directo, quem priori loco euoluere conuenit, vela ad directionem nauis normaliter ſunt expanſa, vbi ante omnia ad angulum ſub quo ventus in vela irruit, eſt reſpiciendum, quoniam ab obliquitate incidentiae non ſolum vis venti imminuitur, ſed etiam dum nauis prouehitur, ex compoſitione veri motus venti et nauis cum alia vis venti in vela tum

alia directio exoritur. Vi autem venti hoc modo pro curſu directo determinata, duplex inde effectus in nauim redundat, alter quo nauis propellitur, et eo vsque propellitur, quoad reſiſtentia ipſi vi propellenti fiat aequalis, nauisque tum motu vniformi prouehatur; qui ſtatus aequalitatis, cum mox eueniat, ex vi propellente cum reſiſtentia comparata ſtatim celeritas nauis, qua vniformiter progredietur, colligi poteſt.

Praeterea vero vis venti momentum afferet ad nauim antrorſum inclinandam, dum contra ex reſiſtentia oritur vis ad nauim retrorſum inclinandam, quare ſi hae duae vires fuerint aequales, nauis nullam inclinationem ſubibit. Illud autem momentum praecipue pendet ab altitudine malorum, quo enim altius vela expanduntur, eo maius inde reſultat momentum ad nauem inclinandam: dum ratione motus progreſſiui perinde eſt, ſiue vela altius ſiue humilius ſint expan-

ſa,

ſa, dummodo eandem vim a vento excipiant. Hinc igitur altitudo malorum ita definiri poteſt, vt ab actione venti naui nulla inclinatio inducatur: verum haec, quae ad malos attinet, atque diſpoſitionem velorum, ex contemplatione curſus obliqui potiſſimum ſunt determinanda.

Curſus autem obliquus, vt iam notavimus, exiſtit ſi vela non normaliter ad nauis directionem expanduntur, ita vt media directio omnium virium a vento exceptarum a nauis directione declinet. Secundum hanc ergo mediam directionem nauis primum propelletur, ſed in eadem directione motum non proſequetur, propterea quod vis reſiſtentiae hoc modo vi propellenti nunquam aequalis et directe contraria fieri poſſet, Statim enim atque nauis oblique fertur, quoniam alterutrum latus in aquam impingit, reſiſtentia lateralis mox fit perquam magna prae reſiſtentia, quae ſecundum na-

vis directionem agit; vnde in quouis motu obliquo directio reſiſtentiae multo magis a directione nauis declinat, quam ipſa directio motus: ſic verbi gratia euenire poteſt, vt, dum directio curſus a directione nauis tantum angulo 10° declinat, directio reſiſtentiae inde 30° declinare poſſit. Ex quo perſpicuum eſt ſi directio vis propellentis fuerit obliqua, obliquitatem curſus eiusmodi fore, vt media directio reſiſtentiae fiat directioni vis propellentis contraria. Sic in caſu modo memorato, ſi directio vis propellentis cum directione nauis faciat angulum 30°, curſus nauis tantum 10° a directione nauis declinabit, quia ex hoc curſu reſiſtentia naſcitur, cuius directio 30° declinans fit directioni vis propellentis contraria; nauis autem tantam celeritatem adipiscetur, vt vis reſiſtentiae vi propellenti etiam quantitate aequalis euadat; ex quo non ſolum obliquitatem curſus ſed etiam eius celeritatem determina-

re

Digitized by Google

re licebit. Ex hoc autem diſcrimine inter directiones vis propellentis et ipſius curſus maximum commodum in nauigatione obtinetur quod curſus eam regionem verſus, vnde ventus ſpirat, inſtitui queat; ita ſcilicet, vt vento flante borea, curſus nauis vltra ortum vel occaſum boream verſus dirigi poſſit; atque naues eo praeſtantiores cenſeri ſolent, quo propius ad venti regionem contendere valent. Pendet igitur haec inſignis virtus potiſſimum a reſiſtentia laterali prae reſiſtentia directa, ita vt quo magis reſiſtentia lateralis augeatur, vel reſiſtentia directa minuatur, eo propius nauis aduerſus ventum conari valeat: ceteris autem paribus, naues quo fuerint longiores, eo magis hac praerogatiua gaudebunt.

Ex vi autem venti in curſu obliquo momenta naſcuntur ad motus naui circa omnes tres axes ante memoratos imprimendos. Primo enim vti in curſu directo nauis proram verſus deprimitur, niſi

Digitized by Google

ſi quatenus hic effectus a reſiſtentia aquae impeditur vel ſaltem diminuitur. Cum autem ſtabilitas nauis, qua huic inclinationi reluctatur, ſit maxima, nulla hinc tanta inclinatio oriri poteſt, quae eſſet metuenda, neque igitur ex hoc capite copia velorum neque malorum altitudo reſtringitur. Verum cum in curſu admodum obliquo vela fere ſecundum nauis longitudinem explicentur, directio vis a vento exceptae propemodum ad directionem nauis ſit normalis, vnde maximum oritur momentum ad nauem in latus ſeu circa axem longitudinalem inclinandam, quod momentum eo erit maius, quo altiores fuerint mali, neque hoc caſu vis reſiſtentiae multum iſtam inclinationem diminuere valebit. Quare cum ſtabilitas nauis reſpectu huius axis ſit minima, ſeu inclinationi minime reſiſtit, hinc in curſu obliquo admodum notabilem inclinationem ad latus oriri neceſſe eſt, vnde nauis facile in ſummum diſcri-

Digitized by Google

crimem incidere poſſet, ſi vel vis a vento excepta fuerit nimis magna, vel nimis alte applicata. Atque hinc, cum velorum amplitudo per nauis capacitatem determinetur, eorum altitudo quoque ac proinde altitudo malorum definitur, quae maior eſſe non debet, quam vt nauis inclinationem inde in curſu obliquo oriundam ſine periculo ſuſtinere queat.

Praeterea vero etiam in curſu obliquo euenire poteſt, vt a vi venti nauis ad motum gyratorium circa axem verticalem incitetur, cum qua vi coniungenda eſt ea, quae ad ſimilem effectum producendum ex reſiſtentia naſcitur, ac niſi vel vtraque haec vis euaneſcat, vel ambae ſe mutuo deſtruant, maximo inde vitio naues afficiuntur. Ne enim hoc caſu nauis actu in gyrum agatur, actione gubernaculi eſt prouidendum, quae etiam ſaepenumero huic effectui compeſcendo impar eſſe ſolet, vt taceam tam continua gubernaculi actione curſum nauis non

mediocriter impediri. Quae naues hoc vitio laborant, eae regimen gubernaculi reſpuere dicuntur, quod merito inter ſumma nauium incommoda numeratur: imprimis ergo in fabrica nauium in id eſt incumbendum, vt hoc vitium euitetur, quod idonea malorum collocatione effici poterit. Namque vt naui a viribus ſollicitantibus nullus motus gyratorius circa axem verticalem, qui per centrum grauitatis nauis ductus concipitur, imprimatur, neceſſe eſt vt media directio omnium virium per ipſum hunc axem tranſeat, tum enim momentum harum virium reſpectu huius axis ſumtum euaneſcet. Quamobrem malos in quaque navi ita collocari oportet, vt omnibus velis expanſis cunctarum virium, quae ipſis a vento imprimuntur, media directio per axem illum verticalem tranſeat, ſeu vt planum verticale, quod per mediam virium directionem ductum intelligitur, ſimul per nauis centrum grauitatis tranſeat.

Digitized by Google

eat. Hoc ſcilicet tenendum eſt, ſi media directio virium reſiſtentiae iam ſponte per iſtum axem tranſit, ſin autem hoc ſecus eueniat, etiam malorum collocatio modo tradita tantum immutari debet, vt momentum virium venti cum momento virium reſiſtentiae in aequilibrio conſiſtat. Quotcunque enim fuerint mali, ſemper eorum loco vnus concipi poteſt, qui aequali velorum copia onuſtus eundem producat effectum; huiusque mali locus per praecepta expoſita determinatur: atque hinc porro ſingulorum malorum loca, et altitudines definiuntur, ſi interuallorum, quibus inter ſe ob latitudinem velorum diſtare debent ratio habeatur, ne vela poſteriora anterioribus ventum penitus praeripiant. In praxi quidem vix vnquam haec aptiſſima malorum conſtitutio obtineri poſſe videtur, vt gyratio nauis plane euitetur, poſtremus enim malus in puppi poſitus, et velo plerumque triangulari in-

Digitized by Google

ſtructus, ad hoc vt plurimum adhiberi ſolet, vt vis venti ab eo excepta non tam ad nauem propellendam, quam ad eam gubernandam, viresque reliquas, quae nauem in gyrum agere conantur, deſtruendas impendatur, quo pacto nauis non exiguam vis propellentis iacturam patitur, ſimulque eius facultas aduerſus ventum nauigandi non mediocriter impeditur. In hoc ergo capite, quod fuſius ſum proſecutus, omnia diligentiſſime determinaui, quae ad locum, numerum, et altitudinem malorum pertinere videbantur.

In doctrina porro de curſu obliquo multa alia occurunt, quae non parum vtilitatis ad praxin afferre videntur. Propoſita enim curſus, quem nauis tenere debet, directione, niſi ea nimis prope ad regionem venti dirigatur, pluribus imo infinitis modis vela ita diſponi poſſunt, vt nauis eum curſum ſequatur; ex omnibus igitur eum determinaui,

quo

quo naui motus celerrimus imprimeretur, quae determinatio vſu non carebit, etſi nautae quotidiana experientia edocti hanc aptiſſimam velorum diſpoſitionem iam ſatis accurate eligere norint. Quando autem aduerſus ventum eſt nitendum, eam tam nauis quam velorum directionem aſſignaui, qua contra ventum maximum lucrum impetretur, ad quod commodum nautae maxime reſpicere ſolent.

Expenſis viribus venti et reſiſtentiae, quibus nauis vrgetur, ſupereſt vt actio gubernaculi ad examen reuocetur, quod puppi annecti ſolet. Hic primum corpus nauis puppim verſus ita eſt attenuandum, vt aqua ſatis libere in gubernaculum impingere, ſicque effectum deſideratum producere valeat. Ad ipſam vero gubernaculi actionem explicandam, eius primo vis, quae gubernaculo imprimitur, momentum reſpectu axis per nauis centrum grauitatis traducti eſt colligendum, quod per

Digitized by Google

momentum inertiae nauis reſpectu eiusdem axis diuiſum praebebit accelerationem, qua nauis conuertetur. Hinc patet, cum gubernaculum puppi annexum a centro grauitatis maxime diſtet, eius actionem eſſe maximam, ſimulque ex momento inertiae nauis cognito, ipſa gubernaculi magnitudo ita facile definitur, vt eum, qui requiritur, effectum exhibeat.

His rebus expeditis non erit difficile omnium nauium, ad quamcunque normam ſint extructae, commoda atque incommoda perſpicere ac determinare: quin etiam id, in quo ſumma ſcientiae naualis verſatur, praeſtari poterit, vt propoſito ſcopo, cui nauis deſtinatur, aptiſſima ac proinde perfectiſſima nauis conſtrui queat. Primum enim explicatum eſt, quomodo nauem comparatam eſſe oporteat, vt datum ſtabilitatis gradum tam reſpectu axis longitudinalis quam latitudinalis conſequatur, tum etiam oscil-

Digitized by Google

cillationes et agitationes ab impulſu fluctuum oriundae, ad libitum attemperari poterunt. Tertio prolixe expoſui, quomodo proram nauis conformatam eſſe oporteat, vt pro ratione cuiusque inſtituti minimam reſiſtentiam patiatur, ſicque nauis quam celerrime prouehi queat. Quarto eam nauis figuram deſcripſi, quae ad curſum contra ventum inſtituendum ita ſit accomodata, vti fuerit praeſcriptum; et quae ſimul facillime actioni gubernaculi obtemperet, ſexto quoque locum, numerum et altitudinem malorum itemque velorum copiam ita aſſignaui, vt tam in curſu directo, quam obliquo nauigatio optimo ſucceſſu inſtitui queat. Fieri quidem poteſt, vt plura requiſita diuerſam nauium ſtructuram poſtulent, et quaſi inter ſe pugnare videantur, verum perſpectis omnibus, quae ad quodque requiſitum pertinent, rationibus, non difficile erit quouis caſu diverſas concluſiones inter ſe conciliare, om-

omnibusque requiſitis coniunctim ſumtis tantum ſatisfacere, quantum rei natura permittit.

Alterum nauium genus, quae remis propelluntur, non leuiores inueſtigationes requirit; poſtquam enim iam Ariſtoteles vim remorum ex natura vectis infelici cum ſucceſſu explicare eſt conatus, recentiores mathematici eius quidem errorem agnouerunt, ſed nemo hoc negotium pro dignitate expediuit. Operam igitur dedi, vt eam vim, qua nauis per remos ſollicitatur, ex ipſis primis mechanicae principiis eruerem, atque celeritatem, quam remi quotcunque et viribus quibuscunque agitati naui imprimere valeant accurate definiui. Quoniam huiusmodi naues nunquam velis aduerſus ventum contendunt, ſicque inclinationi, quae in curſu obliquo exiſtit, non ſunt obnoxiae, in hoc tantum erit elaborandum, vt cum ſufficienti ſtabilitatis gradu quam minimam in curſu directo

recto reſiſtentiam offendant. Deinde cum remus ſecundum longitudinem in duas partes ſponte diſtinguatur, alteram interiorem, quae intra nauim verſatur, et a remigibus agitatur, alteram vero exteriorem pala inſtructam, qua per aquam vibratur; eam proportionem inter partem interiorem et exteriorem determinaui, vt ab eadem vi remum agitante maxima vis ad nauem propellendam proficiscatur; haec quidem proportio cum a pondere nauis eiusque reſiſtentia, tum a numero remorum pendet, ſed tamen inveni partem exteriorem ſemper longitudine interiorem excedere debere, quae maxime idonea proportio theoriae innixa in praxi etiam diligenter obſeruatur. Hic autem magnopere diſſentit Vir Celeb. Bouguer Academiae Regiae Pariſinae Socius, in eximio tractatu gallico, quem nuper *de naue* edidit, vbi in capite de remorum actione, ad quasdam circumſtantias minus attentus, concluſit,

Digitized by Google

vt nauis a remis promtiſſime proppellatur, requiri, vt pars interior longior ſit exteriore. Verum hic leuis eſt lapſus, atque excellentia reliquorum, quae in hoc opere pertractauit, argumentorum largiſſime compenſatur.

De hoc opere plurimum mea intereſt, vt quaedam, quae ad hos meos libros ab omni ſuſpicione plagii liberandos faciunt, paucis admoneam, plura enim argumenta, quae vterque tractauimus, ita ſimili modo ſunt expoſita, vt equidem ea ex illo opere, quod fere quadriennium ante meum prodiit, hauſiſſe non immerito videri poſſem. Verum toti Academiae Imperiali, cuius iuſſu meum tractatum iam ab Anno 1737 conſcribere coepi, ſatis ſuperque notum eſt, priorem librum iam tum, cum Petropoli abiiſſem, quod factum eſt anno 1740, omnino fuiſſe abſolutum, ac poſteriorem librum, ad medietatem vſque perductum, quem deinceps hic Berolini ſtatim poſt meum aduen-

Digitized by Google

aduentum penitus perfeci, ita vt vterque liber iam anno ſequente publicam lucem aſpicere potuiſſet, teſtes quoque in hanc rem allegare poſſem plures amicos meos, quibuscum iam ab illo tempore praecipua capita meditationum mearum communicaueram; ſed auctoritas Academiae mihi abunde ſufficit ad me vindicandum. Huc accedit, vt Celeb. Bouguerus toto illo tempore, quo ego in hoc ſtudio laboraui in America ſit commoratus, vbi etiam opus ſuum conſcripſiſſe dicitur, ita vt inter nos nullum commercium litterarium intercedere potuerit, ex quo alter ab altero quicquam proficere potuiſſet.

Atque haec ſunt fere, quibus Te, *Comes Illuſtriſſime* de inſtituto meo, quod in his libris ſum perſecutus, certiorem facere viſum eſt, vt quanti momenti haec ſcientia naualis in republica exiſtimari mereatur, hinc coniicere poſſis, Gratias autem Tibi,

quod

Digitized by Google

quod opus hoc meum publicatione dignum iudicare voluiſti, perſoluo maximas, atque qua me adhuc dignatus es gratia ac beneuolentia, vt me porro proſequi velis enixe rogo. Vale Tuoque Fauore complectere

COMES ILLVSTRISSIME

DOMINE GRATIOSISSIME

Dabam Berolini
d. 25 Ian. A. 1749

Tuum obſequioſiſſimum
L. EVLERVM.

Digitized by Google

Index Capitum

Cap. I. *De aequilibrio corporum aquae inſidentium a* §. 1. *ad* §. 109
Cap. II. *De corporum aquae inſidentium reſtitutione in aequilibrium a* §. 110. *ad* 203
Cap. III. *De ſtabilitate qua corpora aquae inſidentia in ſitu aequilibrii perſiſtunt a* §. 204. *ad* 399.
Cap. IV. *De effectu virium corpora aquae inſidentia ſollicitantium a* §. 400. *ad* 464.
Cap. V. *De reſiſtentia quam figurae planae in aqua motae patiuntur a* §. 465. *ad* 611.
Cap. VI. *De reſiſtentia, quam corpora quaecunque in aqua motu directo lata patiuntur a* §. 612. *ad* 761.
Cap. VII. *De motu progreſſiuo corporum aquae innatantium a* §. 762. *ad* 912.

Digitized by Google

Digitized by Google

Caput Primum.

DE AEQVILIBRIO CORPORVM AQVAE INSIDENTIVM.

LEMMA.

I.

Preſſio quam aqua in corpus ſubmerſum exercet in ſingulis punctis eſt normalis ad corporis ſuperficiem; et vis, quam quodlibet ſuperficiei ſubmerſae elementum ſuſtinet, aequalis eſt ponderi cylindri aquei recti, cujus baſis aequalis eſt ipſi ſuperficiei elemento, altitudo vero aequalis profunditati elementi infra ſupremam aquae ſuperficiem.

Demonſtratio.

Quaelibet aquae particula deorſum premitur a cylindrulo aqueo ſuperincumbente, et preſſio aequatur ponderi huius cylindri. Quaeuis ergo particula hoc modo preſſa tanta vi quaquauerſum diffluere conatur, hocque ipſo conatu particulas adiacentes eadem vi premit. Quare ſi corpus fuerit aquae ſubmerſum, id in ſingulis ſuae ſuperficiei punctis a particulis aquae tanta vi premetur, quanta ipſae particulae premuntur, idque normaliter in ſuperficiem. Vnde veritas lemmatis conſtat, quae autem plenius in hydroſtatica euincitur. Q. E. D.

Digitized by Google

Coroll. 1.

2. Cum preſſio, quam corpus aquae ſubmerſum patitur, ſit in ſingulis punctis ad ſuperficiem corporis normalis, omnes preſſiones coniunctim tendent ad corpus comprimendum et in minus ſpatium reducendum.

Coroll. 2.

3. Niſi ergo ſuperficies corporis ſatis habeat firmitatis compreſſioni reſiſtendi, corpus aquae ſubmerſum revera comprimetur et in minus ſpatium redigetur.

Coroll. 3.

4. Cum igitur conſtet, quantam preſſionem ſingula ſuperficiei corporis ſubmerſi elementa ſuſtineant, ſimulque preſſionum in ſingulis punctis directiones ſint cognitae; determinari poterit vis, quam totum corpus a ſingulis aquae preſſionibus coniunctis ſuffert.

Scholion.

5. Ad preſſionem totalem, quam corpus aquae ſubmerſum ſuſtinet, determinandam, a ſingulis elementis incipi debet. Cum enim directio preſſionum aquae in ſingulis punctis ſit normalis ad ſuperficiem, hae ſingulae preſſiones ſeorſim reſolui debebunt, antequam earum media directio et potentia aequiualens aſſignari queat.

PROPOSITIO 1.

Problema.

6. *Si ſuperficiei planae verticalis* EAIBF *portio*
Tab. I. fig. 1. AIB *aquae ſit immerſa, inuenire vim, quam portio perimetri* AIB *a preſſione aquae ſuſtinet.*

Solutio

Solutio.

Sit AB ſuperficies aquae ideoque linea recta horizontalis, quae inſtar axis conſideretur. Ex elemento curvae ſub aqua ſitae Mm ducantur ad axem applicatae verticales MP, mp vocenturque AP, x; PM, y, erit $Pp = Mn = dx$ $mn = dy$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$. Iam preſſio, quam elementum Mm ſuſtinet aequatur rectangulo aqueo, cuius baſis eſt Mm, et altitudo aequalis PM, profunditati ſcilicet elementi Mm infra aquae ſuperficiem. Haec igitur preſſio erit $= y\,ds$, eiusque directio eſt normalis MN in elementum Mm. Reſoluatur haec preſſio in duas laterales, quarum altera tendat verticaliter ſurſum in directione MP altera vero horizontaliter ſit directa. Erit ergo ob MN : MP $= ds : dx$, vis elementum Mm ſurſum premens, $= y\,dx$; vis vero elementum Mm horizontaliter pellens $= y\,dy$. Integrando igitur erit vis aquae totum arcum AM horizontaliter propellens $= \frac{y^2}{2}$; vnde vis totam curuam ſubmerſam AMIB horizontaliter vrgens fiet $= o$, puncto enim M in B translato evaneſcet applicata y. Vis autem quae totum arcum AM ſurſum premit, erit $= \int y\,dx =$ areae AMP. Quare tota curua AIB ſurſum vrgebitur vi, quae areae AIB eſt proportionalis; atque iſta vis aequalis erit ponderi aquae aream AIB occupantis. Q. E. F.

Coroll. 1.

7. Vis igitur aquae tendet figuram EIF verticaliter ſurſum ex aqua expellere, et reipſa expellet, niſi vel grauitate vel alia vi externa in hoc ſitu retineatur.

Coroll. 2.

8. Quia omnes vires horizontales, quibus elementa omnia curuae aquae ſubmerſa vrgentur ſeſe deſtruunt: apparet figuram EIF aquae immerſam neutiquam horizontaliter vrgeri. Quare etiam nulla opus eſt vi ad motum horizontalem cohibendum.

Coroll. 3.

9. Cum igitur vires horizontales ſeſe deſtruant, et ſolae verticales ſuperſint, cuiuis elemento Mm concipi poteſt vis id verticaliter ſurſum pellens applicata, quae aequalis eſt areae elemento $PMmp$.

Scholion.

10. Antequam vires, quas corpora aquae immerſa a preſſionibus aquae ſuſtineant, inveſtigare queant, neceſſe erat a ſuperficiebus ordiri, etiamſi huiusmodi caſus in mundo non detur. Sed cum caſus magis compoſiti facilius enodentur, ſi prius ſimpliciores examini ſubiiciantur, eundem ordinem etiam hic retinere conuenit. Quamobrem neminem offendi arbitror locutionibus impropriis, quibus vti coactus ſum, dum ponderis, quod rectangulum aqueum habeat, mentionem feci; hoc enim ad analogiam cum ſequentibus declarandam indicare oportuit, vbi ſimiles proprietates in ipſis corporibus detegentur.

PROPOSITIO 2.

Problema.

11. *Si figura plana verticalis aquae fuerit immerſa, inuenire mediam directionem omnium preſſionum aquae, et potentiam iis omnibus aequiualentem.* Solutio

Digitized by Google

Solutio.

Cum, poſtquam ſingulae preſſiones aquae in elementa exertae reſolutae fuerint in verticales et horizontales, hae omnes preſſiones horizontales ſe mutuo deſtruant, ſolae verticales omnibus aquae preſſionibus aequiualebunt. Quare hoc tantum requiritur vt harum virium verticalium media directio et potentia aequiualens definiatur. Sed cum hae omnes potentiae directiones habeant parallelas, erit potentia aequiualens iis omnibus ſimul ſumtis aequalis ideoque proportionalis areae AIB. Directio porro erit quoque verticalis puta IL cuius diſtantia AK a puncto A inuenietur, diuidendo ſummam omnium momentorum ad quodpiam punctum fixum A relatorum per ipſarum potentiarum ſummam, quae eſt $= \int y\,dx$. Sed cum elementum Mm ſurſum vrgeatur vi $= y\,dx$ erit eius momentum reſpectu puncti A $= yx\,dx$. Vnde ſumma omnium momentorum erit $\int yx\,dx$, ſi poſt integrationem ponatur $x = AB$. Quare diſtantia AK erit $= \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, poſito ſcilicet poſt vtramque integrationem $x = AB$. Puncto ergo K determinato, erit verticalis per id ducta LI media directio omnium aquae preſſionum, atque potentia ipſa aequiualens erit $= \int y\,dx$ ſeu areae AIB. Q. E. F.

Coroll. 1.

12. Si O fuerit centrum grauitatis areae AIB, et ex eo perpendicularis OK ad axem AB ducatur, erit etiam $AK = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, vti ex ſtaticis conſtat, quare recta verticalis, per centrum grauitatis partis ſubmerſae AIB ducta, erit media directio omnium aquae preſſionum.

Coroll. 2.

13. Loco omnium ergo aquae preſſionum ſubſtitui poteſt vnica vis, figuram in directione IL verticaliter ſurſum pellens, quae aequalis eſt ponderi aquae aream AIB implentis.

Scholion.

14. Quae in caſu, quo corpus aquae immerſum ponitur tantum ſuperficiei, circa preſſionem aquae elicuimus, eadem quoque pro ipſis corporibus valent; vti mox oſtendetur; ſcilicet quod potentiae horizontales omnes ſeſe deſtruant et media directio ſit linea verticalis per centrum gravitatis voluminis ſub aquae merſi tranſiens, atque quod potentia aequiualens aequetur ponderi aquae parti ſubmerſae volumine aequali. Ceterum etiamſi hae proprietates iam ſatis ſint cognitae, tamen eas methodo hac genuina analytice eruere ad viam ad ſequentia praeparandam idoneum viſum eſt.

PROPOSITIO 3.

Problema.

15. *Si corpus quodcunque ex aliqua parte aquae immergatur, determinare vim, quam eius pars aquae ſubmerſa a preſſionibus aquae ſuſtinet.*

Solutio.

Tab. I. fig. 2. Repraeſentet planum tabulae ſectionem corporis merſi verticalem, ſitque AEIFBL ſectio corporis horizontalis in aquae ſuperficie facta, ita vt corporis pars infra hanc ſectionem ſita in aqua verſetur. In hac ſectione ſumatur recta quaecunque AB pro axe ad eumque ducantur duae ordinatae proximae LI, *li*, quas ſecent aliae rectae

Digitized by Google

rectae proximae axi parallelae FF, ef; ex punctis interſectionum Q, q R, r deorſum ducantur verticales, abſcidentes in ſuperficie corporis ſub aqua elementum Mm, cuius areola ſit dS. Iam ponatur $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, erit z profunditas elementi Mm infra ſuperficiem aquae. Quare preſſio aquae, quam elementum Mm ſuſtinet, aequatur ponderi cylindri aquei cuius baſis eſt dS et altitudo z, exponatur hoc pondus per zdS. Directio autem huius vis, cum ſit normalis ad ſuperficiem ducatur ad elemetrum Mm normalis MN, quae producta plano horizontali ALB occurrat in N, erit ergo MN directio vis aquae elementum Mm prementis, ad cuius poſitionem inveniendam exprimat haec aequatio $dz = Pdx + Qdy$ naturam ſuperficiei, quae ſub aqua verſatur. Ex N tam ad axem AB, quam ad applicatam LI ducantur normales NH et NK, erit ex indole normalium $PH = Pz$ et $QK = -QZ$. Ducatur recta QN, quae quia eſt horizontalis, normalis erit ad verticalem QM, eritque $QN = z\sqrt{(P^2 + Q^2)}$ et $MN = z\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$. Iam vis premens elementum Mm in directione MN, quae vis eſt $= z\,dS$, reſoluatur in binas, quarum altera elementum Mm ſurſum vrgeat in directione MQ, altera vero horizontaliter in directiome parallela ipſi QN. Cum autem ſit $MN : MQ = \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)} : 1$ erit vis verticalis elementum Mm ſurſum pellens $= \frac{z\,dS}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$, et vis horizontaliter iuxta parallelam ipſi QN vrgens $= \frac{zdS\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ Haec autem vis, quia eius directio non eſt conſtans, reſoluatur denuo in duas ſecundum horizontales QK et QF ſollicitantes, quarum illa, quae ſecundum parallelam applicatae

catae LI agit erit $= \frac{-QzdS}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, et altera, cuius directio axi AB eſt parallela $= \frac{PzdS}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Sed cum ſit rectangulum $Qr = dxdy$ ad areolam $Mm = dS$ vt QM ad MN, erit elementum $Mm = dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ quo valore loco dS ſubſtituto, prodibit vis elementum Mm ſurſum vrgens $= zdxdy =$ priſmati RM. ſeu aequalis eſt ponderi aquae, cuius volumen eſt priſma RM. Tota ergo corporis ſuperficies, quae eſt ſub aqua, premetur ſurſum a vi, quae aequalis eſt ſummae omnium priſmatum, hoc eſt, quae aequalis eſt ponderi aquae, cuius volumen adaequat partem corporis in aqua verſantem. Vis autem quae elementum Mm horizontaliter ſecundum parallelam applicatae LI ſollicitat erit $= -Qzdxdy$. Si nunc ponatur abſciſſa $AP = x$ conſtans, habebitur vis horizontalis, quae omnia elementa ſub faſcia Li poſita ſollicitat, in directione parallela ipſi LI ſumendo integrale ipſius $-Qzdxdy$, ſeu ob x conſtans erit haec vis $= -dx\int Qzdy$. At ſi x eſt conſtans erit $dz = Qdy$, quare iſta vis erit $= -dx\int zdz = -\frac{z^2dx}{2}$. Poſito nunc puncto Q in I vbi eſt $z = o$, exprimet $-\frac{z^2dx}{2}$ vim horizontalem parallelam ipſi LI, qua portiuncula ſuperficiei ſub aqua poſitae reſpondens elemento Qq iI vrgetur. Translato ergo puncto Q in L, quo z iterum euaneſcit, haec vis quoque euaneſcet. Quare vis horizontalis, qua portio ſuperficiei corporis ſub faſcia Li poſitae vrgetur aequalis fit nihilo. Et conſequenter omnes vires horizontales parallelae applicatis LI, quibus omnia ſuperficiei corporis ſub aquae poſitae elementa vrgentur, ſeſe deſtruunt. Deinde vis horizontalis, cuius directio axi AB eſt parallela, qua elementum Mm vrgetur

tur eſt $= Pzdxdy$ ſumto nunc $y = PQ$ conſtante, erit vis iſta horizontalis, qua ſuperficiei portiuncula ſub elemento E R poſita vrgetur $= dy\int Pzdx = \frac{z^2 dy}{2}$ propter $Pdx = dz$ ſumto y conſtante. Tranſlato ergo puncto Q in F, vbi fit $z = o$, tota vis horizontalis, qua portio ſuperficiei corporis ſub faſcia E f ſita ſollicitatur, euaneſcet. Ergo etiam haec vis horizontalis, cuius directio parallela eſt axi A B, qua tota corporis ſuperficies ſub aqua ſita vrgetur, euaneſcit. Quocirca tota preſſio, quam corpus in aqua immerſum a preſſionibus aquae ſuſtinet, conſiſtit in ſolis viribus verticalibus, quibus corpus ſurſum vrgetur, quarumque ſumma aequatur ponderi aquae, cuius volumen aequale eſt parti corporis ſubmerſae. Q. E. I.

Coroll. 1.

16. Quia vires horizontales vtriusque generis, quibus ſingula ſuperficiei ſub aqua merſae elementa ſollicitantur, coniunctim ſeſe deſtruunt; corpus a preſſionibus aquae tantum ſurſum pellitur, neque ipſi ab his preſſionibus motus horizontalis imprimi poteſt.

Coroll. 2.

17. Cum vis, qua corpus aquae immerſum ſurſum pellitur, aequalis ſit ponderi aquae, cuius volumen aequatur volumini partis corporis ſubmerſae, manifeſtum eſt niſum corporis, quam vi propriae grauitatis habet deorſum labendi, a preſſionibus aquae diminui. Et quidem eius proprium pondus diminuetur pondere voluminis aquae, quod aequale eſt volumini partis corporis ſubmerſae.

Digitized by Google

Coroll. 3.

18. Quamobrem ſi tanta pars corporis aquae fuerit immerſa, vt tantum aquae volumen aequiponderet ipſi corpori, tum niſus deorſum labendi corporis euaneſcet, corpusque aquae innatabit.

Coroll. 4.

19. Ex his quoque perſpicitur, ſi minor pars, quam ad natandum requiritur, aquae fuerit immerſa, tum corpus ſibi relictum profundius immergi donec in aqua volumen occupet, cuius pondus aequale ſit ipſi corporis ponderi.

Coroll. 5

20. Contra ſi maior pars, quam ad natandum requiritur, aquae immergatur, tum vis aquae corpus ſurſum pellens maior erit, quam corporis grauitas, ideoque ſurſum eleuabitur, donec parti ſubmerſae aequale volumen aquae aequiponderans ſit ipſi corpori.

Scholion. I.

21. Haec, quae ſunt allata, pertinent potiſſimum ad corpora, quae grauitate ſpecifica leuiora ſunt quam aqua. Nam ſi corpus grauitate ſpecifica aquam ſuperet, tum ne totum quidem corpus aquae ſubmerſum tantae aquae quantitatis locum occupare poteſt, quae ipſi corpori aequiponderaret. Corpus igitur grauitate ſpecifica grauius quam aqua, etiam totum aquae ſubmerſum, conſeruabit niſum deorſum labendi, interim tamen hic niſus minor erit quam extra aquam in aere. Diminuetur ſcilicet eius pondus pondere aquae eiusdem voluminis, quod corpus habet, eius-

Digitized by Google

eiusque ratio ex praecedentibus aeque fluit, quam eorum, quae de corporibus leuioribus aqua deduximus.

Scholion. 2.

22. Quo igitur corpus aquae innatet, oportet vt tanta pars eius aquae immergatur, vt volumen aquae illi parti aequale idem habeat pondus, quod ipſum corpus habet. Nam ſi maior vel minor pars eſſet ſubmerſa, corpus vel aſcenderet vel deſcenderet magis, ſi ſibi ipſi eſſet relictum. Hoc igitur eſt primum atque maxime neceſſarium requiſitum ad natandum, vt corpus definitae magnitudinis partem aquae habeat immerſam; haecque regula ab auctoribus ita enunciari ſolet, vt dicant, omne corpus natans tantum aquae de ſuo loco depellere, quantum pondere ipſum corpus adaequet. Hoc autem ſolum ad natandum non ſufficit, ſed inſuper alius canon requiritur, ſecundum quem corpus, quo natet et in quiete perſiſtat, diſpoſitum eſſe debet. Quanquam enim vires horizontales ſe mutuo deſtruant, et hanc obrem corpus horizontaliter non promoueatur, tamen a ſolis viribus verticalibus, ex grauitate corporis, et preſſionibus aquae ortis, etiamſi inter ſe fuerint aequales, motus poteſt generari, quo quies turbatur, vti in ſequentibus fuſius oſtendetur.

PROPOSITIO 4.

Problema.

23. *Si corpus quodcunque ex parte aquae immergatur, determinare mediam directionem omnium preſſionum aquae in partem ſubmerſam exertarum, atque potentiam omnibus illis preſſionibus aequiualentem.* Tab. II. fig. 1.

 Solutio

Digitized by Google

Solutio.

Cum vires horizontales omnes, quae ex reſolutione preſſionum aquae in ſingula partis ſubmerſae elementa oriuntur, ſe mutuo deſtruant, ſolae vires verticales in conſiderationem veniunt. Quarum directiones, cum ſint inter ſe parallelae, erit quoque media earum directio verticalis atque potentia aequiualens aequabitur ſummae omnium virium verticalium. Quamobrem potentia aequiualens omnibus aquae preſſionibus aequalis erit ponderi aquae, cuius volumen aequale eſt parti corporis ſubmerſae. Sit autem eius directio, ſeu media directio omnium preſſionum aquae recta verticalis IK, quae ſectioni corporis horizontali ABCD cum ſuperficie aquae factae occurrat in puncto K, et ex puncto K ad axem in ſectione prolubitu aſſumtum ducatur perpendicularis KH. Iam conſideretur vt ante elementum partis ſubmerſae $Mm = dS$, indeque verticales ad planum ſectionis ACBD ducantur, itemque applicatae QP, qp. Tum ponatur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, exprimatque haec aequatio $dz = Pdx + Qdy$ naturam ſuperficiei ſubmerſae; ita vt ſit $dS = dxdy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ Vis autem, qua elementum Mm verticaliter ſurſum vrgetur, aequatur ponderi aquae voluminis $= zdxdy$, cuius momentum reſpectu horizontalis ad AB normalis et per A ductae eſt $zxdxdy$. Poſito igitur x conſtante et ſumto integrali ipſius zdy, ita vt toti ordinatae perpunctum P ductae reſpondeat, dabit $\int xdx\int zdy$ ſummam omnium momentorum reſpectu horizontalis perpunctum A ad AB normaliter ductae. Haecque expreſſio ſi diuidatur per volumen partis ſubmerſae, quod eſt $\int dx\int zdy$, prodibit diſtantia AH. Di-

Digitized by Google

Diſtantia autem KH habebitur ſi ſumma omnium momentorum reſpectu axis AB diuidatur per volumen partis ſubmerſae $\int dx\int zdy$. Momentum autem vis elementum Mm verticaliter ſurſum pellentis eſt $yzdxdy$. Poſito nunc y conſtante et ſumto intergrali zdx ita vt omnibus applicatis y reſpondeat, tum dabit $\int ydy\int zdx$ ſummam omnium momentorum cis axem AB, ſimili vero modo quaeratur ſumma omnium momentorum vltra AB exiſtentium, et ab hac ſumma illa ſumma ſubtrahatur reſiduumque per $\int dx\int zdy$ diuiſum dabit diſtantiam HK. Cognito autem puncto K innoteſcit media directio quaeſita IK. Q. E. I.

Coroll. 1.

24. Cum vis, qua elementum Mm ſurſum vrgetur, proportionalis ſit priſmati elementari QRM, manifeſtum eſt rectam KI hoc modo inuentam per centrum grauitatis voluminis aquae ſubmerſi, quod ſit in O, tranſire. Eodem enim calculo, quo hic vſi ſumus, centrum grauitatis ſolet determinari.

Coroll. 2.

25. Media ergo directio omnium aquae preſſionum, quas corporis pars ſubmerſa patitur eſt linea verticalis, quae per centrum grauitatis partis ſubmerſae tranſit.

Coroll. 3.

26. Si ergo corpus aquae innatet, quo caſu volumen aquae parti ſubmerſae aequale aequiponderat ipſi corpori, tum potentia omnibus preſſionibus aquae aequiualens aequalis erit ponderi ipſius corporis.

B 3 Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 4.

27. Corpus igitur aquae innatans ab aqua tanta vi ſurſum pellitur, quantum eſt corporis pondus. Huius vero vis corpus ſurſum pellentis directio eſt linea verticalis per centrum grauitatis partis ſubmerſae tranſiens.

Scholion.

28. Ex conuenientia, quam demonſtrauimus inter mediam directionem preſſionum aquae et rectam verticalem per centrum grauitatis partis ſubmerſae, tranſeuntem, facile intelligitur, hoc punctum O eſſe debere centrum grauitatis corporis AIB tanquam homogenei conſiderati. Quare vtcunqne corporis pars ſubmerſa fuerit ex heterogenea materia conflata, tamen in puncto O inueſtigando haec pars ſubmerſa tanquam homogenea conſiderari debet. Hanc ob cauſam vt ambiguitatem in voce centri gravitatis evitem, in poſterum iſtud grauitatis centrum O, quod ex conſideratione corporis homogenei quaeri debet, centri magnitudinis nomine appellabo. Centrum igitur magnitudinis partis ſubmerſae inuenietur, ſi pars ſubmerſa tanquam ex materia homogenea conſtans conſideretur, eiusque centrum grauitatis definiatur. Hoc itaque centrum magnitudinis partis ſubmerſae, quoque erit centrum grauitatis aquae de ſuo loco depulſae, vel eius aquae, quae ante quam corpus immergebatur, ſpatium AIB occupauerat.

LEMMA.

Tab. II. fig. 2. 29. *Corpus* ABC, *cui duae potentiae* Gg *et* Oo *in directionibus parallelis et contrariis ſunt applicatae, in aequi-*

aequilibrio eſſe non poteſt, niſi illae potentiae ſint inter ſe aequales, earumque directiones in eandem rectam incidant.

Demonſtratio.

Si potentiae fuerint inaequales, manifeſtum eſt corpus in aequilibrio eſſe minime poſſe: nam etiamſi coinciderent, fortior corpus in ſua directione promoueret. At ſi potentiae fuerint aequales, neque vero coincidant, tum eae corpus ABC ſecundum plagam BAC circa ſe ipſum conuertent. Quare quo corpus quieſcat, neceſſe eſt vt potentiae G*g* et O*o* non ſolum ſint aequales, ſed etiam vt earum directiones coincidant. Q. E. D.

PROPOSITIO 5.

Theorema.

30. *Corpus aquae libere inſidens in quiete ſeu aequilibrio eſſe nequit, niſi tum pars ſubmerſa volumine adaequet pondus aquae ipſi corpori aequale, tum vero niſi totius corporis centrum grauitatis atque centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem incidant.*

Demonſtratio.

Sit EAIBF corpus aquae vtcunque inſidens et AIB eius pars ſubmerſa. Cum iam corpus ponatur liberum, nullas ſentiet ſollicitationes ad motum, praeter ſuam vim grauitatis et preſſiones aquae, quas eius pars ſubmerſa patitur. At vis corporis grauitatis aequatur ponderi ipſius, eiusque directio eſt recta verticalis tranſiens per ipſius centrum grauitatis. Ponatur P = ponderi totius corporis, et ſit G eius centrum grauitatis; quibus poſitis corpus propter grauitatem deorſum vrgebitur in directione GH Tab. III. Fig. 1.

a vi

a vi P. Deinde omnibus aquae preſſionibus aequiualet vis directe ſurſum pellens in directione OL per centrum magnitudinis O partis ſubmerſae tranſeunte, quae quantitate adaequat pondus aquae ſpatium a parte ſubmerſa occupatum implentis; poſito ergo hoc pondere Q propter preſſiones aquae corpus in directione OL ſurſum vrgebitur vi $=Q$. Corpori igitur noſtro aquae hac ratione inſidenti omnino duae vires P et Q ſunt applicatae, quarum altera corpus in directione GH deorſum altera vero in directione OL ſurſum ſollicitat. Per lemma itaque praemiſſum corpus in aequilibrio eſſe nequit, niſi ſimul ſit $Q=P$ et recta LI in rectam HK incidat. Fit autem $Q=P$, ſi tanta pars aquae ſubmergatur, quae volumine adaequet pondus aquae ipſius corporis ponderi aequale, deinde vero lineae LI et HK coincident, ſi centrum grauitatis G totius corporis et centrum magnitudinis O partis ſubmerſae in eadem recta verticali ſint ſita. Q. E. D.

Coroll. 1.

31. Duo ergo requiruntur ad hoc, vt corpus aquae inſidens poſſit eſſe in aequilibrio, quorum ſi alterutrum deſit, corpus in quiete perſiſtere nequit.

Coroll. 2.

32. Quoties ergo corpus aquae inſidere videmus, tum certum eſt, partem eius ſubmerſam volumine aequalem eſſe ponderi aquae ipſius corporis ponderi aequali; Atque praeterea centrum magnitudinis partis ſubmerſae et centrum grauitatis totius corporis in eadem recta verticali eſſe ſita.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 3.

33. Quare ſi corpus aquae innatans fuerit in aequilibrio, tum recta iungens centrum grauitatis totius corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, erit normalis in ſectionem aquae AB.

Coroll. 4.

34. Cum per experimenta conſtet pondus, quo datum aquae volumen grauitat, ex dato corporis cuiusvis pondere inueniri poterit quantitas partis ſubmerſae ad aequilibrium producendum requiſita.

Scholion 1.

35. Quo in ſequentibus plures circumlocutiones euitem, loco integrarum deſcriptionum terminis conuenientibus vtar. Ita centrum grauitatis totius corporis vocabo tantum ſimpliciter centrum grauitatis; atque centrum magnitudinis partis ſubmerſae tantum centrum magnitudinis, cum hae voces nunquam alio ſenſu occurrant. Deinde etiam ſectionem, quam corpus cum ſuprema aquae ſuperficie conſtituit, vocabo ſimpliciter ſectionem aquae. Simili modo verticalis centri grauitatis nobis erit recta verticalis per centrum grauitatis totius corporis tranſiens, atque verticalis centri magnitudinis denotabit rectam verticalem per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeuntem.

Scholion 2.

36. Quando in ſequentibus ope harum regularum eos corporum ſitus determinabimus, in quibus aquae inſi-

Digitized by Google

dere poſſint, id ita intelligi debet, vt corpus, ſi in eiusmodi ſitu definito aquae accuratiſſime collocetur, tum demum in hoc ſitu ſit quieturum. At ſi tantillum ex hoc ſitu remoueatur vel inclinetur, vtrum tum ſponte ſeſe reſtituat, an vero in alium ſitum ſe recipiat? alia quaeſtio eſt, quae huc nondum pertinet, ſed quam in ſequentibus enodabo. Si autem ſitus, in quo corpus aquae impoſitum quieſcere poteſt, ita fuerit comparatus, vt, corpus, ſi tantillum ex eo ſitu declinetur, ſe non reſtituat, ſed alium ſitum quaerat, in quo acquieſcat, tum difficillimum eſt efficere, vt corpus in eo ſitu perſiſtat. Etſi enim ſumma ſollertia in eum ſitum collocetur, tamen leuiſſima vi vel aeris vel aquae ſtatim ex eo deturbabitur, adeo vt difficillimum ſit, huiusmodi caſus per experimenta comprobare. Veluti nullum eſt dubium, quin baculus leuis aquae verticaliter ita immiti queat, vt aequilibrium obtineatur; interim tamen in hoc ſitu conſtitutus quaſi ſua ſponte procumbet, ſitumque horizontalem affectabit, in quo acquieſcat.

PROPOSITIO 6.

Theorema.

Tab. II. fig. 3. 37. *Omne corpus, quod generatur ex rotatione cuiuscunque figurae ACFB circa axem quempiam* AB, *jacta, ita aquae inſidere poterit, vt eius axis* AB *teneat ſitum verticalem, dummodo centrum grauitatis fuerit poſitum in ipſo axe* AB.

Demonſtratio.

Recta EF ad axem AB normali abſcindatur area EBF, quae circa axem converſa generet ſolidum, quod volumine

lumine adaequet pondus aquae totius corporis ponderi aequale, poteritque hoc ſolidum eſſe pars aquae immergenda, quo corpus in quiete permaneat, ſi modo alterum requiſitum in hoc ſitu locum inueniat. At huius partis ſubmerſae, quae generatur ab area EFB, centrum magnitudinis cadit in axem AB, quare cum in eundem quoque centrum grauitatis cadere ponatur, poterit corpus ita aquae inſidere, vt axis AB teneat ſitum verticalem. Q.E.D.

Coroll. 1.

38. Ex hac demonſtratione etiam intelligitur, hoc corpus quoque inuerſo ſitu, quo B ſurſum A vero deorſum dirigitur, aquae inſidere poſſe; adeo vt iam duo conſtent ſitus, quibus huiusmodi corpora aquae inſidere poſſint.

Coroll. 2.

39. Hinc etiam ſequitur globum, cuius centrum grauitatis in ipſo centro eſt poſitum, quocunque ſitu aquae inſidere poſſe. Recta enim quaelibet per centrum tranſiens axis AB locum ſuſtinere poteſt.

Coroll. 3.

40. Ad hanc corporum claſſem pertinent cylindri recti itemque coni recti tam integri quam truncati. Quare etiam haec corpora aquae ita innatare poterunt, vt eorum axes teneant ſitum verticalem, ſi modo eorum centra grauitatis in ipſos axes incidant.

Scholion.

41. Corpora haec rotunda hanc habent proprietatem, vt omnes ſectiones ad axem normales ſint circuli,

Digitized by Google

et demonſtratio hoc nititur principio, quod axis A B per ſingularum ſectionum transuerſalium centra grauitatis tranſeat. Quare eadem propoſitio aeque valebit pro corporibus, quorum ſectiones ad axem normaliter factae ſint polygona regularia quaecunque, ac pro circulis. Quamobrem etiam huiusmodi corpora aquae ita innatare poterunt, vt axes ſitum verticalem teneant, ſi modo centrum grauitatis totius corporis in hoc ipſo axe fuerit poſitum.

Coroll. 4.

42. Si ergo huiusmodi corpora ex materia homogenea fuerint fabricata, tum vtique eorum centra grauitatis in axes ſuos incident. Quare hinc concludere licet, omnia corpora homogenea, quae eiusmodi habent figuras, aquae ita inſidere poſſe, vt eorum axes ſint verticales.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tab. III. fig. 2. 43. *Corpus cylindricum* DEIH, *cuius omnes ſectiones transverſales* DE, FG, HI *ſunt inter ſe aequales et ſimiles, ſitu erecto verticali aquae inſiſtere poteſt, ſi modo eius centrum grauitatis fuerit in recta* AB *per omnium ſectionum centra grauitatis tranſeunte.*

Demonſtratio.

Ponatur portio FGIH tanta, quanta aquae immergi debet, eaque re ipſa aquae concipiatur ſubmerſa. Erit ergo huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis in recta BC ſitum, quippe quae tranſit per omnium ſectionum transverſalium centra grauitatis ſeu magnitudinis. In eadem autem recta AB ſitum eſſe ponitur centrum grauitatis totius

tius corporis. Quare cum recta AB ad ſectionem aquae FG ſit normalis, corpus in hoc ſitu aquae inſidere poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

44. Me non monente facile etiam intelligitur, idem corpus ſitu quoque inverſo quo HI ſurſum DE vero deorſum vergit, aquae inſiſtere poſſe; ita vt conſequenter duo ſitus ſint cogniti, quibus huiusmodi corpora aquae inſidere poſſint.

Coroll. 2.

45. Si corpus DEIH fuerit ex materia homogegenea factum, centrum grauitatis per ſe in rectam AB incidit. Quare huiusmodi corpora ſemper aquae ſitu erecto inſidere poterunt, idque duplici modo

Scholion.

46. Ad hoc corporum genus pertinent praeter cylindros vulgares rectos omnia priſmata recta, quascunque etiam habeant baſes ſiue regulares ſiue inregulares. Deinde etiam pariter huc referuntur omnia ſolida quae generantur, ſi figura quaecunque plana ſecundum ductum lineae rectae ad planum figurae perpendicularis motu ſibi ſemper parallelo moueatur. Atque de his omnibus valet Theorema propoſitum.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

47. *Corpus cylindricum* abdc, *quale in praecedente propoſitione conſiderauimus, ſitu horizontali* bd *aquae inſidere poterit, ſi eius centrum grauitatis* G *in eius ſectionem* Tab. III. Fig. 3.

 mediam

mediam e f *incidat. Et quidem eodem ſitu aquae inſidere poterit, quo ſectio media ſola* ALBI *aquae ſitu verticali innatare poteſt, ſi eius centrum grauitatis in* G *fuerit ſitum.*

Demonſtratio.

Inſideat enim hoc corpus aquae ſitu horizontali, ſitque tanta eius pars iam immerſa, quanta ad aequilibrium requiritur; manifeſtum eſt centrum magnitudinis o partis ſubmerſae quoque in ſectionem mediam *ef* cadere debere, eſſeque in ipſo centro magnitudinis partis ipſius ſectionis mediae ſubmerſae. Niſi ergo haec centra G et *o* in eandem rectam verticalem incidant, conuertatur corpus eousque donec illa centra hoc requiſitum acquirant. Quo facto ſit LAIB ſitus ſectionis mediae, AB ſectio aquae, G eius centrum grauitatis, quod congruere ponimus cum totius centro grauitatis, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae AIB, quod per ſe conuenit cum centro magnitudinis in ipſo corpore *ad*. Quare ſi recta G*o* fuerit verticalis, tam ſola ſectio LI quam totum corpus hoc ſitu aquae inſidere poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Quo autem ſectionis LAIB ſolius tanta pars aquae immergatur, quanta immergi debet, ſi eſt cum corpore coniunctum, ipſi huic ſectioni eadem grauitas ſpecifica reſpectu aquae tribui debet, quam habet integrum corpus.

Coroll. 2.

49. Si corpus fuerit homogeneum, tum eius centrum grauitatis non ſolum in ſectionem mediam *ef* incidet ſed inſuper in ipſius ſectionis mediae centro grauitatis erit ſitum.

Coroll.

Digitized by Google

Collor. 3.

50 Vt igitur huiuſmodi corporum cylindricorum ſitus, quo horizontaliter aquae inſidere poſſint, determinetur, ſufficiet inquirere, in quonam ſitu vna eius ſectio aquae verticaliter inſiſtere poſſit.

Scholion.

51. Quo igitur definiri queat ſitus, quo huiusmodi corpora cylindrica aquae horizontaliter incubare poſſint, tantum ad figuram ſectionum transuerſalium reſpiciendum eſt. Problema ergo huc redit, vt data quacunque figura plana LAIB, eius grauitate ſpecifica reſpectu aquae et centro grauitatis G determinetur pars AIB aquae immergenda, quae quidem quantitate conſtat, vt recta iungens centrum grauitatis G et centrum magnitudinis *o* partis AIB ſit in ſectionem aquae AB normalis. Quamobrem ad noſtrum inſtitutum conueniet aliquot huiusmodi figurarum planarum conſiderare, et quibusnam ſitibus aquae verticaliter innatare queant inueſtigare. Praecipue autem ad corpora cylindrica ſeu priſmatica homogenea reſpiciemus, et hanc ob cauſam pro centro grauitatis G figurae LAIB ſumemus ipſius figurae centrum grauitatis; ita vt nobis quaeſtio huc reducatur; A data figura LAIB ducendo rectam AB partem AIB datae magnitudinis abſcindere, hac conditione vt recta iungens centra totius figurae et partis abſciſſae perpendicularis ſit ad rectam AB. Incipiamus igitur *a* triangulo tanquam figura ſimpliciſſima indeque ad quadrilatera progrediemur.

LEMMA.

52. *Si per trianguli* ACB *centrum grauitatis* G *ducatur recta quaecunque* IPQ *lateri* BC *producto in* Q *occurrens, erit* AC. CQ−BC. CP = 3 CP. CQ. De- Tab. IV. Fig. 1.

Demonſtratio.

Ex angulis A et B per centrum grauitatis G ducantur rectae AH, et BK quae per notam centri grauitatis proprietatem biſecabunt latera BC et AC eritque $AG : GH = 2 : 1$. et $BG : GK = 2 : 1$. Eſt vero ſin. API : ſin. $BQI = \frac{AG}{AP} : \frac{GH}{HQ} = \frac{GK}{KP} : \frac{BG}{BQ} = CQ : CP$. Ex quibus proportionibus eruitur $BC + 2CQ : AC - CP = BC + CQ : AC - 2CP = CQ : CP$ atque hinc $AC.CQ - BC.CP = 3CP.CQ$. Q. E. D.

Goroll. 1.

53. Si ſinus anguli API ponatur $= m$, et ſinus anguli $BQI = n$; erit $m : n = CQ : CP$. Vnde cum ſit $CQ = \frac{AC \cdot CQ - BC \cdot CP}{3CP}$ erit $CQ = \frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3n}$ et $CP = \frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3m}$.

Coroll. 2.

54. Si ex A ducatur ipſi GQ parallela donec ipſi BC productae occurrat, erit $ea = 3GQ$. Quocirca erit $CP : PQ = AC : 3GQ$ atque $GQ = \frac{AC \cdot PQ}{3 \cdot CP}$. Poſito ergo ſin. $ACB = k$ erit $GQ = \frac{K \cdot AC}{3n}$.

Coroll. 3.

55. Si recta QI fuerit normalis in AB, erit $BC : AC =$ coſ. API : coſ. BQI. Quare ſi coſinus anguli API ponatur M et coſinus ang. $BQI = N$ erit $BC : AC = M : N$ ſeu $M.AC = N.BC$.

PROPOSITIO 9.

Problema.

Tab. IV. fig. 2. 56. *Propoſito triangulo homogeneo* ACB, *cuius ad aquam grauitas ſpecifica ſit vt* p *ad* q, *caſus determinare, quibus*

quibus hoc triangulum aquae ita innatare poteſt, vt latus AB *maneat extra aquam ſitum.*

Solutio.

Sit aCb pars quaeſita aquae immergenda, quo triangulum aquae inſidere queat, ſitque recta IPQ ducta per centra grauitatis tum totius trianguli ACB tum partis ſubmerſae aCb. Quo ergo triangulum in hoc ſitu aquae inſidere queat, oportet vt recta IQ ſit in ab perpendicularis atque praeterea vt area trianguli aCb ſit ad aream ACB vt $p:q$. Ponatur nunc $AC = a$ $BC = b$ atque ſinu anguli $ACB = k$, eiusque coſinu $= K$. Porro ſit $aC = x$, $bC = y$, ſin. $API = m$ eius coſinus $= M$, item ſin. $BQI = n$ et coſ. $= N$. His poſitis erit $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$. Cum nunc recta QPI tranſeat per centrum grauitatis trianguli ACB erit $CQ = \frac{ma - nb}{3n}$ Deinde quia eadem recta per centrum grauitatis trianguli aCb tranſit, erit $CQ = \frac{mx - ny}{3n}$, quibus coniunctis erit $mx - ny = ma - nb$. Porro cum recta PI normaliter occurrat rectae ab erit $Mx = Ny$, ex quibus aequationibus elicitur $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et $y = \frac{M(ma - nb)}{mN - Mn}$. Quoniam vero eſt $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$, ſubſtituantur hi valores in aequatione $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et poſito $t = \frac{n}{N}$ prodibit $x = \frac{ka - Kat - bt}{k - 2Kt - ktt}$ atque $y = (kt + K)x$. Hinc vero invenitur $t = \frac{\frac{1}{2}(b + Ka) - Kx + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}}{Kx}$ atque $y = \frac{1}{2}(b + Ka) + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}$ Denique eſt triang. aCb ad triang. ACB vt xy ad ab, erit ergo $p:q = xy:ab$ et $y = \frac{pab}{qx}$, quo valore loco y

in ſuperiore aequatione ſubſtituto prodibit $q^2x^4-(a+Kb)q^2x^3+(b+Ka)pqabx-a^2b^2p^2=0$. Valor igitur ipſius x ex hac aequatione erutus dabit latus aC, quo inuento ſi ſumatur $bC=\frac{pab}{q \cdot aC}$ habebitur ſectio aquae ab, atque pars aquae immergenda quaeſita. Q. E. I.

Coroll. 1.

57 Quot igitur aequatio inuenta continet radices reales et affirmatiuas tot caſibus triangulum propoſitum aquae ita inſidere poterit, vt latus AB extra aquam maneat, ſolusque angulus C immergatur, dummodo ſit $x < a$ et $y < b$.

Coroll. 2.

58. Si autem omnes 4 radices fuerint reales, tum earum tres tantum poſſunt eſſe affirmatiuae ob ternas tantum ſignorum alternationes. Radix autem negatiua propoſito non inſeruit. Quare non dari poſſunt plures tribus caſus, quibus triangulum praeſcripto modo aquae inſiſtere poteſt.

Coroll. 3.

59. Praeterea neque x maius eſſe poteſt quam a neque y maius quam b. Quare ſi eueniat vt vel x excedat $\underline{a}$ vel y excedat $\underline{b}$, tum hi quoque caſus erunt inutiles.

Coroll. 4.

60. Si tertium latus trianguli AB ponatur $=c$, hocque loco coſinus K ang. ACB in computum introducatur, propter $K=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ prodibit $q^2x^4-\frac{q^2x^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2)+\frac{apqx}{2}(a^2+3b^2-c^2)-a^2b^2p^2=0$.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 5.

61. Duae autem aequationes, in quibus inſunt x et y, ſimpliciſſimae ſunt ſequentes. Prima ſcilicet eſt $qxy = pab$, atque altera erit iſta $y^2 - (b + Ka)y = x^2 - (a + Kb)x$; quibus duabus aequationibus problema propoſitum ſoluitur.

Scholion.

62. Cum aequatio inuenta habeat quatuor dimenſiones neque generaliter concepta diuiſionem admittat, ita vt vix quicquam ex illa ad vſum deduci queat; eam ad caſus particulares triangulorum accommodabimus, pro quibus aequatio ſit diuiſibilis, atque caſus, quibus natatio euenire poteſt, reipſa aſſignari et repraeſentari poſſint.

Exemplum 1.

63. Sit triangulum propoſitum ACB iſoſceles, ita vt latera AC et BC, quae angulum C ſub aqua ſitum, comprehendunt ſint aequalia. Ponatur ergo $BC = AC = a$, erit $b = a$, atque aequatio inuenta abibit in hanc $q^2x^4 - (1 + K)q^2ax^3 + (1 + K)pqa^3x - a^4p^2 = o$, quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $qx^2 - pa^2 = o$ et II. $qx^2 - (1 + K)qax + pa^2 = o$. Quarum illa aequatio dat $x = \pm aV\frac{p}{q}$, ſolus autem valor affirmatiuus habet locum, quia latera AC et BC non vltra C producta ponuntur. Quare ex prima aequatione erit $aC = x = aV\frac{p}{q}$ et $bC = y = aV\frac{p}{q}$, qui ergo eſt vnus caſus, quo triangulum iſoſceles, ACB aquae inſidere poteſt; eritque pars ſubmerſa aCb itidem triangulum iſoſceles, et ſectio aquae ab parallela baſi AB, atque $AC : aC = Vq : Vp$. Ex altera aequatione pro x duo obtinentur valores, quorum alter ſi pro x capiatur, Tab. IV. fig. 3.

D 2 alter

alter pro y valebit, adeo vt vel neuter vel vterque ſit locum habiturus. Erit vero $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})}$, atque $y = \frac{1}{2}(1+K)a \mp a\sqrt{(\frac{1}{4}(+K)^2 - \frac{p}{q})}$; qui valores ne fiant imaginarii oportet vt ſit $1 + K > 2\sqrt{\frac{p}{q}}$ ſeu $K > 2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1$. Praeterea quia tam x quam y minores eſſe debent quam a, oportet ſit $\frac{1}{2}(1+K) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} < 1$ ſeu $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} < \frac{1}{2}(1-K)$, vnde erit $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ denotante α quemcunque numerum affirmatiuum. Quamobrem quo praeter caſum aſſignatum adhuc duo reliqui locum habeant, oportet vt in his duabus aequationibus $K = 2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1 + \beta$ et $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ tam α quam β obtineant valores affimatiuos. Quod ſi ergo euenerit, prodibunt duo reliqui caſus quibus triangulum aquae inſidere poteſt

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1+K)a + a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \\ y = \frac{1}{2}(1+K)a - a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \end{array}\right\} \text{caſus ſecundus.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1+K)a - a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \\ y = \frac{1}{2}(1+K)a + a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \end{array}\right\} \text{caſus tertius.}$$

Coroll. 1.

64. Si triangulum ACB fuerit aequilaterum, erit angulus C $60°$, ideoque eius coſinus $K = \frac{1}{2}$. Quare quo duo poſteriores caſus locum inueniant oportet ſit primo vt $\frac{3}{2} > 2\sqrt{\frac{p}{q}}$ hoc eſt vt $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Deinde neceſſe eſt quoque vt ſit $\frac{p}{q} = (1-\alpha)(\frac{1}{2}+\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \alpha^2$, ſumto pro α numero affirmatiuo quocunque. Quod autem $\frac{p}{q}$ ſit fractio affirmatiua oportet ſit $\alpha < 1$. Requiritur ergo vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$.

Scholion.

Scholion.

65. Cum alterum requiſitum, ne duo poſteriores caſus fiant impoſſibiles, ſit $\frac{p}{p} < \frac{1}{4}(1+K)^2$ ponatur $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}(1+K)^2 - \alpha^2$, et per alterum requiſitum debebit eſſe $\alpha < \frac{1}{2}(1-K)$. Erit ergo $\alpha^2 < \frac{1}{4}(1-K)^2$ ideoque $\frac{p}{q} > K$. Quocirca dato angulo ACB, niſi ratio $\frac{p}{q}$ contineatur intra limites $\frac{1}{4}(1+K)^2$ et K, praeter ſitum primo determinatum alius non datur, quo triangulum iſoſceles vertice deorſum verſo aquae innatare poteſt. Eſt vero ſemper $\frac{1}{4}(1+K)^2 > K$, differentia enim eſt quadratum $\frac{1}{4}(1-K)^2$, quare pro quouis angulo C triangula exhiberi poſſunt, quae tribus modis angulo C deorſum verſo aquae inſidere poſſunt.

Coroll. 2.

66. In triangulo autem aequilatero, ſi fuerit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $< \frac{9}{16}$, duo caſus poſteriores quibus triangulum aquae inſidere poteſt erunt $x = \frac{3}{4}a \pm aV(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})$, et $y = \frac{3}{4}a \mp aV(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})$

Coroll. 3.

67. Si angulus C fuerit rectus erit $K = o$ huiusmodi igitur triangula tripl'ci modo aquae innatare poterunt, dummodo ſit $\frac{p}{q} < \frac{1}{4}$. Tum vero erit I. $x = aV\frac{p}{q}$; II. $x = \frac{1}{2}a + aV(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})$ et III. $x = \frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})$.

Exemplum 2.

68. Si grauitas ſpecifica trianguli ita fuerit comparata vt ſit $p : q = Kb : a$ abibit aequatio generalis in hanc:

Tab. V. fig. 1. $x^4-(a+Kb)x^3+(b+Ka)Kb^2x-K^2b^4=o$ quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $x-Kb=o$; et II. $x^3-ax^2-Kabx+Kb^3=o$. Harum aequationum prima dat $Ca=x=Kb$ et cum ſit $y=\frac{pab}{qx}$ fiet $y=b$. Incidet ergo punctum b in B, et recta Ba erit ſectio aquae.

Coroll. 1.

69. Cum ſit $Ca=Kb$, erit $\frac{Ca}{CB}=K=$ coſinui ang. C. Quare recta Ba erit parpendicularis in latus AC. Haec ergo perpendicularis ſemper poteſt eſſe ſectio aquae, ſi fuerit $p:q=Ca:CA$.

Coroll. 2.

70. Iſta autem innatatio locum habere non poteſt, niſi vterque angulus A et C ſit acutus, alioquin enim recta Ca non intra triangulum caderet quod tamen eſt neceſſe.

Scholion.

71. Simili modo ſi aſſumſiſſemus $p:q=Ka:b$, aequatio diuidi potuiſſet per $x-a$, ita vt prodiiſſet $x=a$. Hic vero caſus a priore non differt, niſi quod punctum B in A et viciſſim ſit translatum. Determinatis ergo caſibus, quibus triangulum homogeneum aquae verticaliter ita innatare poteſt, vt vnicus angulus aquae immergatur, ſupereſt vt etiam in eos caſus inquiramus, quibus huiusmodi triangula cum duobus angulis ſub aqua ſubmerſis innatare queant; his enim in duobus modis continentur omnes omnino caſus, quibus triangulum aquae verticaliter innatare poteſt.

PROPO-

PROPOSITIO 10.
Problema.

72. *Propoſito triangulo homogeneo* CAB *cuius grauitas ſpecifica ſit ad aquam vt* p *ad* q, *determinare caſus, quibus hoc triangulum ſitu verticali aquae ita inſidere poteſt, vt ſolus angulus C ſupra aquam emineat.* Tab. V. Fig. 2.

Solutio.

Sit $aABb$ pars aquae immergenda, quae quaeſito ſatisfaciat. Per centra grauitatis tam totius trianguli ACB, quam partis ſubmerſae $aABb$ ducatur recta IPQ, quae debebit eſſe normalis in ſectionem aquae ab. At iſta recta IPQ quoque tranſibit per centrum grauitatis trianguli Cab ſupra aquam eminentis. Quamobrem quaeſtio huc reducitur vt inueniatur poſitio rectae ab, quae a toto triangulo partem $aABb$ abſcindat, quae ſit ad totum vt p ad q; atque vt recta iungens centra grauitatis totius trianguli et trianguli Cab ſit normalis ad ſectionem aquae ab. Haec ergo poſterior conditio prorſus conuenit cum praecendente problemate, prior vero in hoc diſcrepat quod hic area trianguli Cab ſe habere debeat ad aream trianguli totius CAB vt $q-p$ ad q; cum haec ratio ibi eſſet vt p ad q. Qamobrem ſolutio prioris problematis ad hoc accomodabitur, ſi tantum $q-p$ loco p ſcribatur. Ponatur ergo vt ante $AC = a$, $BC = b$, coſ. ang. ACB $= K$, et $Ca = x$ atque $Cb = y$, erit $q^2x^4 - (a + Kb)q^2x^3 + (b + Ka)(q-p)qabx - (q-p)^2a^2b^2 = 0$. Ex qua aequatione valor ipſius x erutus dabit reſpondentem valorem ipſius $y = \frac{(q-p)ab}{qx}$. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

73. Quod igitur aequatio inuenta continebit radices reales et affirmatiuas pro x quae ſint ipſo a minores et quibus reſpondent valores ipſius y minores quam b, tot modis triangulum propoſitum aquae ita inſidere poterit, vt anguli A et B ſub aqua verſentur.

Coroll. 2.

74. Sin autem aequationis propoſitae omnes radices ſint reales, earum tres tantum eſſe poſſint affirmatiuae. Quare fieri non poteſt, vt triangulum pluribus quam tribus modis aquae ita innatare queat, vt ſolus angulus C extra aquam emineat.

Coroll. 3.

75. Si tertium latus AB ponatur $= c$, hocque loco coſinus K anguli ACB introducatur, tum ſequens orietur aequatio $q^2x^4 - \frac{q^2x^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2) + \frac{(q-p)qax}{2}(a^2+3b^2-c^2) - (q-p)^2a^2b^2 = 0$.

Coroll. 4.

76. Si fuerit $p : q = 1 : 2$, haec aequatio congruit, cum aequatione ſuperioris propoſitionis. Quare hoc caſu eadem recta ab poterit eſſe ſectio aquae tam ſi angulus C fuerit ſolus extra aquam, quam ſi fuerit aquae ſubmerſus.

Exemplum.

77. Ponatur triangulum propoſitum ACB iſoſceles, latus ſcilicet $BC = AC$ ſeu $b = a$, atque prodibit iſta aequatio $q^2x^4 - (1+K)q^2ax^3 + (1+K)(q-p)qa^3x - (q-p)^2a^4 = 0$,

$a^4 = o$, quae per diuiſionem abit in has duas aequationes I. $qx^2 - (q-p)a^2 = o$ et II. $qx^2 - (1+K)qax + (q-p)a^2 = o$. Harum aequationum prior dat $x = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$, cui quoque reſpondet $y = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$, hoc ergo caſu triangulum extra aquam eminens erit quoque iſosceles, et ſectio aquae *ab* parallela baſi AB. Altera aequatio has duas pro x dat quantitates $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q})}$, quibus reſpectiue reſpondet $y = \frac{1}{2}(1+K) \mp a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q})}$. Praeter primum ergo ſitum inuentum alius non dari poteſt, niſi ſit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, at etiamſi fuerit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, hoc ſolum non ſufficit ad realitatem poſterium caſuum; inſuper enim requiritur vt tam x quam y ſint ipſo a minores, id quod locum habebit ſi fuerit $\frac{q-p}{q} > K$. Quamobrem, quo caſus poſteriores fiant reales, oportet vt ratio $\frac{p}{q}$ inter hos limites $1-K$ et $1-\frac{1}{4}(1+K)^2$ contineatur.

Scholion.

78. Ex his igitur duabus propoſitionibus omnes caſus definiri poſſunt, quibus datum triangulum homogeneum aquae ſitu verticali innatare poteſt. Perſpicitur autem ſimul numerum caſuum ſatis magnum eſſe poſſe, prout plures radices aequationum inuentarum ſunt reales et quaeſito ſatisfacientes. Omnes autem radices ſi fuerint vtiles, tum triangulum 18 diuerſis modis aquae innatare poterit; tres enim ſunt caſus, quibus ſinguli anguli aquae immerguntur, totidemque quibus ſinguli extra aquam eminent. Vix autem euenire poteſt, vt omnes octodecim caſus fiant reales quia ſi grauitas ſpecifica trianguli ad aquam pro

vno angulo requiſitam habet proprietatem, eadem pro reliquis angulis non amplius ſatisfacere poteſt. Ita triangulum aequilaterum, ſi quidem eius grauitas ſpecifica ad aquam contineatur inter rationes 16 et 9 : 16, quo caſu plurimas admittit radices ſatisfacientes, 12 tantum diuerſis modis aquae inſidere poteſt.

LEMMA.

79. *Si ex trianguli* ABC *centro grauitatis* G *in latus* AB *perpendicularis* GQ *ducatur, erit lateris* AB *ſeg-*
Tab. V. fig. 3. *mentum* $AQ = \frac{3 \cdot AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$.

Demonſtratio.

Ex angulo C per centrum grauitatis G ad latus AB ducatur recta CD, erit ex nota centri grauitatis natura $AD = BD$, atque $GD = \frac{1}{3} CD$. Demittatur porro ex C ad AB perpendiculum CP, erit $AP = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB}$, hincque $DP = \frac{AB}{2} - AP = \frac{BC^2 - AC^2}{2 AB}$. Cum autem CP ſit parallela ipſi GQ erit $PQ = \frac{2}{3} DP$ vnde fiet $PQ = \frac{BC^2 - AC^2}{3 \cdot AB}$. Quamobrem erit $AQ = AP + PQ = \frac{3 AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

80. Ipſum ergo perpendiculum GQ ex centro grauitatis trianguli G in latus AB demiſſum erit tertia pars perpendicularis CP, ita vt ſit $GQ = \frac{1}{3} CP$.

Coroll. 2.

81. Si angulus ACB fuerit rectus, erit $AB^2 = AC^2 + BC^2$, hoc ergo caſu fiet $AQ = \frac{2 AC^2 + BC^2}{3 AB}$
$= \frac{2}{3}$

Digitized by Google

$= \frac{1}{3} AB + \frac{AC^2}{3 \cdot AB}$. Atque cum ſit $CP = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ erit $GQ = \frac{AC \cdot BC}{3 \cdot AB}$.

Coroll. 3.

82. Si triangulum ACB fuerit iſoſceles, ita vt ſit $AC = BC$ erit $AQ = \frac{1}{2} AB$. Atque hoc caſu erit $GQ = \frac{1}{3} \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$.

LEMMA.

83. *Si a parallelogrammo rectangulo* ABDC *recta* EF *abſcindatur triangulum* EDF, *atque ex centro grauitatis* G *rectanguli totius* AD *in rectam* EF *perpendiculum* GH *demittatur*, *inuenire punctum* H. Tab. V. fig. 4.

Solutio.

Ex centro grauitatis G rectanguli in latus BD demittatur perpendicularis GI ſecans rectam EF in K erit $DI = \frac{1}{2} BD$, et $EI = ED - \frac{1}{2} BD$, itemque $GI = \frac{1}{2} AB$. Iam ob triangula EIK, EDF ſimilia, erit $IK = \frac{DF \cdot EI}{DE} = DF - \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque $EK = \frac{EF \cdot EI}{DE} = EF - \frac{EF \cdot BD}{2 \cdot DE}$. Deinde habebitur $GK = \frac{1}{2} AB - KI = \frac{1}{2} AB - DF + \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque propter triangula GHK et EDF ſimilia iſta analogia $EF : DF = GK : KH$, ex qua ſequitur $KH = \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF} + \frac{DF^2 BD}{2 DE \cdot EF}$. Quocirca reperietur $EH = EF - \frac{BD \cdot DE}{2 EF} + \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF}$, ſeu $EH = \frac{2 DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2 EF}$. Q. E. I.

Coroll.

84. Ex eorundem triangulorum GHK et EDF ſimilitudine ſequitur etiam fore $EF : ED = GK : GH$. Ex

 hac

Digitized by Google

hac ergo analogia reperitur ipſa centri grauitatis G *a* recta EF diſtantia $= \frac{AB \cdot DE}{2EF} + \frac{BD \cdot DF}{2EF} - \frac{DE \cdot DF}{EF} = \frac{AB \cdot DE + BD \cdot DF - 2DE \cdot DF}{2EF}$.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. V. fig. 4. 85. *Propoſito parallelogrammo rectangulo homogeneo* ABDC, *cuius grauitas ſpecifica ſit ad aquam vt* p *ad* q, *inuenire caſus, quibus hoc parallelogrammum rectangulum aquae ita inſidere poteſt, vt ſolus angulus* D *immergatur.*

Solutio.

Sit EF ſectio aquae quaeſita, et EDF portio aquae immergenda, erit $\frac{1}{2}$ DE. DF : AB. BD $= p : q$; atque recta jungens centra grauitatis totius rectanguli, et partis EDF normalis eſſe debet in ſectionem aquae EF. Quare normales ex centro grauitatis rectanguli, et centro grauitatis trianguli EDF in idem rectae EF punctum incidere debebunt. Quare per 83. et 81 erit $\frac{2DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2EF} = \frac{2DE^2 + DF^2}{3EF}$. Poſitis nunc $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $DF = x$ et $DE = y$, erit $qyx = 2pab$ ſeu $y = \frac{2pab}{qx}$, atque $2y^2 + 3ax - 3by = 2x^2$, quae ſi loco y eius valor $\frac{2pab}{qx}$ ſubſtituatur abit in hanc $2qqx^4 - 3qqax^3 + 6pqab^2x - 8p^2a^2b^2 = 0$. Ex qua aequatione inuenietur valor ipſius x, ex eoque valor ipſius y. Q. E. I.

Coroll. I.

86. Aequatio haec ad ſummum tres habere poteſt radices affirmatiuas reales, quarum autem ea tantum quae-

ſito

ſito ſatisfaciunt, quae pro x valores dant ipſo a minores, et quibus ſimul valores ipſius y reſpondent ipſo b minores.

Coroll. 2.

87. Cum triangulum EDF dimidium rectanguli excedere nequeat, perſpicuum eſt rationem q ad p minorem dupla eſſe non poſſe, ita vt eſſe debeat vel $\frac{q}{p} = 2$ vel $\frac{q}{p} > 2$.

Exemplum.

88. Si rectangulum abeat in quadratum vt ſit $b = a$, habebitur iſta aequatio $2q^2x^4 - 3qqax^3 + 6pqa^3x - 8ppa^4 = 0$, quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $qx^2 - 2pa^2 = 0$ et II. $2qx^2 - 3qax + 4pa^2 = 0$. Harum aequationum illa dat $x = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, cui reſpondet $y = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, quo ergo caſu x et y ſunt aequales, et ſectio aquae EF ſit parallela diagonali BC. Ex altera aequatione eruitur duplex valor ipſius $x = \frac{3a}{4} \pm a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$, cui quoque iſte duplex valor ipſius y reſpondet, ſcilicet $y = \frac{3a}{4} \mp a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$. Ne igitur hi valores fiant imaginarii oportet ſit $\frac{2p}{q} < \frac{9}{16}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{9}{32}$. Deinde ne excedant latus a oportet ſit $a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})} < \frac{a}{4}$ ſeu $\frac{q}{p} > \frac{1}{4}$. Quare ſi $\frac{p}{q}$ contineatur inter hos limites $\frac{8}{32}$ et $\frac{9}{32}$ tres caſus dantur, quibus quadratum aquae ita inſidere poteſt, vt ſolus angulus D aquae immergatur.

Scholion.

89. Eadem ſolutio parumper immutata etiam huic problemati ſatisfaciet, quo quaeruntur caſus, quibus paralle-

rallelogrammum rectangulum aquae ita inſidere queat, vt tres anguli B, A, C ſub aquam mergantur, ſoluſque angulus D emineat. Hoc enim caſu pariter vt ante poſitio rectae EF inueniri debet, in quam recta iungens centra grauitatis rectanguli AD et trianguli EDF ſit normalis. Hoc tantum differt iſtud problema a praecedente, quod hic area ABEFC ad totum rectangulum rationem habere debeat p ad q. Cum ergo hoc caſu ratio areae trianguli EDF ad rectangulum totum eſſe debeat vt $q-p$ ad q, ſolutio praecedens ad hunc caſum accommodabitur ponendo $q-p$ loco p. Manentibus igitur ceteris denominationibus vt ante, erit $2qqx^4-3qqax^3+6(q-p)qab^2x-8(q-p)^2a^2b^2=0$, ex qua valori ipſius x inuento reſpondet valor ipſius $y=\frac{2(q-p)ab}{qx}$. Si rectangulum abeat in quadratum eadem valebunt, quae in exemplo ſunt inventa, ſi modo loco p ponatur $q-p$. Ita quadratum tribus diuerſis modis aquae ita poterit innatare, vt ſolus angulus D extra aquam emineat, ſi $\frac{p}{q}$ contineatur intra hos limites $\frac{24}{32}$ et $\frac{27}{32}$

LEMMA.

Tab. VI. Fig. 1. 90. *Dato trapezio* ABDC, *in quo latera* AC *et* BD *ſint inter ſe parallela, atque ad baſin* CD *normalia, inuenire punctum* H, *in quo recta* GH *per centrum grauitatis trapezii* G *ducta in latus* AB *normaliter incidit.*

Solutio.

Producantur tum latus AB tum baſis CD, donec concurrant in I et ex vtriusque trianguli ACI et BDI cen-

centris grauitatis concipiantur perpendicula in AI demiſſa. Iam ex ſtaticis conſtat fore momentum trapezii reſpectu puncti I aequale differentiae momentorum triangulorum. Momentum autem figurae reſpectu I obtinetur, ſi area multiplicetur in diſtantiam puncti, in quo perpendiculum ex eius centro grauitatis in AI demiſſum in AI incidit, *a* puncto I. Ita momentum trapezii erit $= ABDC.IH$, atque per 81. erit momentum trianguli $ACI = \frac{ACI(2CI^2+AC^2)}{3AI}$ atque momentum trianguli $BDI = \frac{BDI(2DI^2+BD^2)}{3BI}$ Quamobrem habebitur iſta aequatio $ABDC.IH = \frac{ACI(2CI^2+AC^2)}{3AI} - \frac{BD(2DI^2+BD^2)}{3BI}$ ex qua punctum H determinabitur. Ponantur ergo $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, et $CD = \sqrt{(a^2-(b-c)^2)} = d$, eritque $AI = \frac{ab}{b-c}$; $BI = \frac{ac}{b-c}$; $CI = \frac{bd}{b-c}$ atque $DI = \frac{cd}{b-c}$. Ex his prodibit $ABDC = \frac{(b+c)d}{2}$; $ACI = \frac{bbd}{2(b-c)}$ et $BDI = \frac{ccd}{2(b-c)}$. Iam ponatur $AH = x$. erit $HI = \frac{ab}{b-c} - x$, quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur tandem $AH = x = \frac{a^2(b+2c)+b^3-c^3}{3a(b+c)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

91. Simili modo ipſum perpendiculum GH ope momentorum poterit determinari, prodibit autem calculo ad finem perducto $GH = \frac{d(b^3-c^3)}{3a(bb-cc)} = \frac{d(bb+bc+cc)}{3a(b+c)}$.

Coroll. 2.

92. Si fuerit $AC = BD$ ſeu $c = b$, quo caſu trapezium mutatur in parallelogrammum rectangulum, prodibit $AH = \frac{a}{2}$, et $GH = \frac{bd}{2a} = \frac{b}{2}$ propter $d = a$ hoc caſu.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO. 12.

Problema.

93. *Determinare caſus, quibus parallelogrammum rectangulum* ABDC *homogeneum, cuius grauitas ſpecifica ad aquam ſit vt* p *ad* q, *aquae ita inſidere poteſt, vt duo anguli* C *et* D *ſub aqua, reliqui vero* A *et* B *extra aquam verſentur.*

Solutio.

Sit EF ſectio aquae, quae quaeſtioni ſatisfaciat, oportet primo vt ſit $\frac{CE+DF}{2}$: $AC = p:q$. Deinde requiritur vt recta iungens centra grauitatis totius rectanguli et portionis ECDF in EF ſit normalis, id quod eueniet, ſi perpendicula ex vtriusque trapezii ECDF et EABF centris grauitatis in EF demiſſa coincidant. Per lemma igitur praemiſſum obtinebitur iſta aequatio $\frac{EF^2(CE+2DF)+CE^3-DF^3}{3EF(CE+DF)} = \frac{EF^2(CAE+2BF)+AE^3-BF^3}{3EF(AE+BF)}$. Ponantur ergo $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $CE = x$, $DF = y$, erit $AE = b-x$, $BF = b-y$, et $EF^2 = a^2 + x^2 - 2xy + y^2$. Iam propter primam conditionem ſit $\frac{x+y}{2} : b = p:q$ ſeu $x+y = \frac{2bp}{p}$ altera vero conditio hanc ſuppeditat aequationem $\frac{(a^2+(x-y)^2)(x+2y)+x^3-y^3}{x+y} = \frac{(a^2+(x-y)^2)(2b-x-2y)+(b-x)^3-(b-y)^3}{2b-x-y}$ Quae aequatio per diuiſionem reducitur ad has duas $x = y$ et $a^2 + 2(y^2 + yx + xx) = 3b(y+x)$. Cum autem ſit $y = \frac{2bp}{q}$ dabit prior aequatio $x = y = \frac{bp}{q}$ poſterior vero $- x\,2qqxx - 4pqbx + 8p^2b^2 - 6pqb^2 + q^2a^2 = 0$, ex qua aequatione eruitur valor ipſius $x = \frac{pb}{q} \pm \sqrt{(\frac{3pb^2}{q} - \frac{2p^2b^2}{q^2} - \frac{a^2}{2})}$ eritque $y = \frac{pb}{q} \mp \sqrt{(\frac{3pb^2}{q^2} - \frac{2ppb^2}{q^2} - \frac{a^2}{2})}$. Q.E.I.

Co.

Coroll. 1.

94. Primus ergo caſus, quo $x = y = \frac{pb}{q}$ ſemper locum habet, dummodo fuerit rectangulum grauitate ſpecifice leuius quam aqua ſeu $p < q$. Tum autem ſectio aquae erit EF parallela lateribus AB et CD. Tab. VI. fig. 3.

Coroll. 2.

95. Haec igitur ſola ſolutio quatuor exhibet caſus, quibus rectangulum homogeneum aquae innatare poteſt. Quodlibet enim latus per eam in aqua ſitum horizontalem prout CD tenere poterit.

Coroll. 3.

96. Duo autem reliqui caſus non ſemper locum habere poſſunt. Quo enim exiſtere queant requiritur, vt primo ſint reales, deinde vt ſint affirmatiui et tertio vt ſint minor quam latus *b*. Tab. VI. fig. 2.

Coroll. 4.

97. Hi vero pro *x* et *y* inuenti valores, quo ſint reales requiritur vt ſit $a^2 < \frac{6pb^2}{q} - \frac{6p^2b^2}{q^2}$ hoc eſt vt ſit $\frac{a}{b} < \surd(\frac{6pq - 6pp}{qq})$. Deinde quo ſint affirmatiui neceſſe eſt vt ſit $a^2 > \frac{6pqb^2 - 3p^2b^2}{q^2}$ ſeu $\frac{a}{b} > \surd\frac{(6pq - 3pp)}{qq}$. Tertio vero quo ſint latere $\underline{b}$ minores oportet vt ſit $a^2 > \frac{10pb^2}{q} - \frac{3p^2b^2}{q^2} - 2b^2$ ſeu $\frac{a}{b} > \surd(\frac{10pq - 3pp - 2qq}{qq})$.

Coroll. 5.

98. Si fuerit rectangulum duplo leuius quam aqua, vt ſit $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$; quo poſteriores caſus fiant reales oportet

F ſit

ſit $\frac{a}{b} < \frac{\sqrt{6}}{2}$ atque $\frac{a}{b} > I$ et tertio $\frac{a}{b} > I$. Requiritur. itaque vt $\frac{a}{b}$ contineatur inter limites 1 et $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Coroll. 6.

99. Si fuerit $p : q = 3 : 4$; quo rectangulum poſteriore ratione aquae inſidere queat, oportet vt ſit primo $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, ſecundo $\frac{a}{b} > 0$ et tertio $\frac{a}{b} > 1$. Quare neceſſe eſt vt $\frac{a^2}{b^2}$ contineatur intra limites $\frac{8}{8}$ et $\frac{9}{8}$.

Coroll. 7.

100. Si fuerit $p : q = 1 : 4$, ne poſteriores aquae innatandi modi fiant inutiles neceſſe eſt vt ſit $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, atque $\frac{a}{b} > 1$ nec non $\frac{a}{b} > 0$. Quare limites erunt 1 et $\sqrt{\frac{9}{8}}$ vt ſupra.

Scholion.

101. Quod in his duobus caſibus poſterioribus limites ſint iidem, mirandum non eſt. Nam ſi EF eſt ſectio aquae pro parte ſubmerſa ECDF, quoque ſectio aquae eſſe poterit pro parte ſubmerſa EABF; hicque caſus locum habet ſi grauitas ſpecifica rectanguli ad aquam fuerit vt $q-p$ ad q. Atque ſi in limitibus pro $\frac{a}{b}$ datis ponatur $q-p$ loco p, primus omnino non mutatur, ſecundus vero et tertius commutantur, adeo vt ſemper pro vtroque caſu iidem limites prodire debeant.

Exemplum.

Tab. VII. fig. 1.

102. Abeat rectangulum in quadratum ABDC et quaeratur, quo modo eius grauitas ſpecifica comparata eſſe debeat, vt quadratum plurimis diuerſis modis aquae inſidere

ſidere queat. Quia ergo eſt $b = a$, fiet primo $x = y = \frac{pa}{q}$ deinde $x = \frac{p}{q}a \pm a\sqrt{(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})}$ atque $y = \frac{p}{q}a \mp a\sqrt{(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})}$, quae poſteriores expreſſiones, quo fiant reales et vtiles, oportet vt primo $\frac{q}{p}$ contineatur intra limites $3 + \sqrt{3}$ et $3 - \sqrt{3}$. Deinde opus eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 4$ vel $\frac{q}{p} < 2$. Tertio vero neceſſe eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 2$ vel $\frac{q}{p} < \frac{4}{3}$. Quare caſus hi fient reales ſi $\frac{q}{p}$ vel intra hos limites $3 + \sqrt{3}$ et 4 vel intra hos $3 - \sqrt{3}$ et $\frac{4}{3}$ contineatur. Deinceps etiam hoc quadratum priore caſu aquae inſidere poteſt, vt vnicus angulus ſub aqua, altero vero vt tres ſub aqua exiſtant (88, 89), hocque vno ſaltem modo, duo enim reliqui ibi expoſiti requirunt vt $\frac{q}{p}$ vel contineatur intra limites 4 et $\frac{32}{9}$, vel intra limites $\frac{4}{3}$ et $\frac{32}{27}$, qui ergo limites ab illis excluduntur. Quare ſi $\frac{q}{p}$ contineatur vel intra limites $3 + \sqrt{3}$ et $\frac{32}{9}$, vel intra limites $3 - \sqrt{3}$ et $\frac{32}{27}$, tum quadratum tam per hanc, quam praecendentem propoſitionem 16 diuerſis modis aquae inſidere poterit. Sit ergo $p : q = 1 : 4$, erunt ſedecim ſectiones aquae, quibus quadratum aquae inſidere poteſt, prout in figura ſunt expreſſae per ef quae eaedem ſectiones quoque valent pro quadrato cuius grauitas ſpecifica ad aquam eſt vt 3 ad 4. Niſi autem grauitas ſpecifica intra dictas rationes contineatur, tum octo tantum modis quadratum aquae inſidere poterit.

Scholion.

103. Quae igitur hic de diuerſis modis, quibus vel triangula vel parallelogramma rectangula homogenea aquae inſidere poſſunt, tradidimus, ea quoque pertinent ad

 priſmata

priſmata homogenea, quarum ſectiones ſunt vel triangula vel rectangula vti ſupra monſtrauimus. Tot ſcilicet modis huiusmodi prismata, dum eorum axes manent in ſitu horizontali, aquae inſidere poterunt, quot tum pro triangulis tum rectangulis in his propoſitionibus aſſignauimus. Hi autem vtique non ſunt omnes caſus, quibus prismata aquae innatare poſſunt, nam praeter hos pluribus quoque aliis modis aquae inſidere poterunt, dum eorum axes vel ſint verticales vel ad horizontem oblique poſiti, quemadmodum ex allatis facile colligere licet. His autem vlterius perſequendis contra noſtrum eſſet inſtitutum, vt immoraremur.

Definitio.

104. Planum diametrale voco planum, quo corpus in duas partes ſimiles et aequales diuiditur ita vt omnes ſectiones corporis, quae fiunt planis ad planum diametrale normalibus, ab hoc plano diametrali diuidantur in duas partes ſimiles et aequales.

Corollarium.

105. Corporis igitur plano diametrali praediti centrum magnitudinis incidit in ipſum planum diametrale, cum ex vtraque eius parte corpus ſit ſibi ſimile et aequale.

Scholion.

106. Corpora, quae habent planum diametrale, prae ceteris merentur, quae examini ſubiiciantur; omnia enim corpora quae ad natandum in aqua adhibentur, ita ſunt comparata, vt planum diametrale admittant. Sic in omni-

omnibus nauibus planum verticale per ſpinam tranſiens habebit hanc proprietatem, vt naues in duas partes ſimiles et aequales diuidat. Quod autem omnes naues hoc modo fabricentur ratio in promtu eſt, cum nulla ſit ratio, cur ex vna parte aliam habeant figuram, quam ex altera. Quamobrem ad figuram nauium aptiſſimam determinandam ſufficit alteram medietatem circa planum diametrale aſſignaſſe, quippe cui altera pars ſimilis et aequalis conſtitui debet.

PROPOSITIO 13.
Problema.

107. *Corpus, quod plano diametrali eſt praeditum, aquae ſemper ita innatare poteſt, vt planum diametrale ſit verticale, ſi modo corporis centrum grauitatis in planum diametrale cadat.*

Demonſtratio.

Sit corpus huiusmodi aquae ita impoſitum, vt planum diametrale teneat ſitum verticalem, erit ſectio aquae normalis ad planum verticale, ideoque pars aquae ſubmerſa a plano diametrali in duas partes ſimiles et aequales diuidetur. Quamobrem huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis cadet in planum diametrale, in quod etiam centrum grauitatis totius corporis cadere ponitur. Conſequenter corpus ita inclinando, vt planum diametrale maneat verticale, effici poteſt, vt recta iungens centra grauitatis et magnitudinis fiat verticalis, quo ergo caſu corpus aquae innatabit. Q. E. D.

Scholion 1.

108. Huiusmodi ſitu, quo planum diametrale eſt verticale, videmus omnis generis naues aquae inſidere, niſi a viribus alienis ex hoc ſitu declinentur. Atque tum in conſtruendis tum onerandis nauibus in id potiſſimum eſt incumbendum, vt centrum grauitatis in planum diametrale cadat, quo naues hoc ſitu deſcripto aquae innatare queant.

Scholion 2.

109. Expoſita igitur ſunt in hoc capite principia quibus ſtatus aequilibrii corporum aquae innatantium nititur, atque ſimul methodus eſt tradita, cuius ope pro quibuscunque corporibus propoſitis ſitus, quibus aquae inſidere poſſunt, determinare licet. Corpora autem hic ſumus contemplati omnino libera, quae a nullis viribus externis ſunt ſollicitata, ſed a ſolis viribus tum grauitatis tum preſſionum aquae in aequilibrium conſtituuntur; in ſequentibus autem tam ad motum quam aequilibrium corporum, quae vel non ſunt libera vel a viribus externis ſollicitantur determinandum progrediemur. Nunc autem ad caput ſecundum pergimus, in quo inueſtigabimus motum, quo corpus non in aequilibrio conſtitutum, ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituit. In hoc ſcilicet capite conſiderabimus corpora aquae ita impoſita, vt vel non debita pars aquae ſit immerſa, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non ſit verticalis, et inquiremus, quomodo ex hoc ſitu in ſtatum aequilibrii ſe recipiant. Cum autem corpus aquae non ita imponi queat, quin e veſtigio in ſtatum aequilibrii collocetur, eiusmodi caſus hic examinandi venient, quibus corpus ab externa vi ex aequilibrio eſt depulſum, et ceſſante ea vi in ſtatum aequilibrii reuertitur.

Caput

Digitized by Google

Caput Secundum

DE CORPORVM AQVAE INNATANTIVM RESTITVTIONE IN AEQVILIBRIVM.

PROPOSITIO 14.
Theorema.

110.

Vt corpus aquae ita inſidat, vt vel non tanta eius pars aquae ſit immerſa quanta ad aequilibrium requiritur, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non fuerit verticalis, tum corpus mouebitur donec in ſtatum aequilibrii peruenerit.

Demonſtratio.

Sit enim primo non tanta pars aquae ſubmerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, manifeſtum eſt vires grauitatis et preſſionum aquae fore inaequales, ideoque ſeſe mutuo non deſtruere. Quare corpus tum mouebitur vel aſcendendo vel deſcendendo, donec in aequilibrii ſitum perueniat. At ſi recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non ſit verticalis, vires grauitatis et preſſionum aquae, etiamſi fuerint aequales, tamen non directe ſibi erunt oppoſitae. Cum igitur etiam hoc caſu vires, quibus corpus ſollicitatur ſe non deſtruant, neceſſe eſt vt motum gyratorium in corpore producant, qui tam diu durabit, donec corpus in aequilibrium fuerit conſtitutum. Q. E. D.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 1.

111. Si igitur corpus vi externa ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum, tum ceſſante hac vi moueri incipiet, donec in ſitum aequilibrii peruenerit.

Coroll. 2.

112. Si ergo daretur corpus, quod ita eſſet comparatum, vt nullum ſitum aequilibrii admitteret, tum hoc corpus aquae impoſitum perpetuo moueri deberet, atque perpetuum mobile verum repraeſentaret.

Coroll. 3.

113. Cum igitur huiusmodi mobile perpetuum contradictionem inuoluat, ſequitur omne corpus ſaltem vnicum habere debere ſitum, in quo in aequilibrio eſſe queat.

Coroll. 4.

114. Quia corpus dum ſe reſtituit in aqua moueri debet, patietur quoque ab aqua reſiſtentiam, quae eo maior erit, quo maior fuerit celeritas corporis contra aquam. Motum autem reſiſtentia prorſus impedire non poteſt cum motus tardiſſimos non amplius afficiat.

Coroll. 5.

115. Interim tamen hoc certum eſt, corpus ſe non tam cito reſtituere poſſe, quam ſi aqua nulla prorſus reſiſtentia reluctaretur. Eo tardius igitur corpus ſe reſtituet, quo maior ſuperanda fuerit reſiſtentia.

Scholion

Scholion.

116. In hoc ergo capite inquirendum nobis erit, cuiusmodi motus in corpore, quod *a* potentiis ſeſe non deſtruentibus ſollicitatur, generetur. Ad hoc autem praeſtandum pluribus opus eſt propoſitionibus ex mechanica petendis, circa effectum potentiarum in corpora finita. Qua de re cum vix quicquam adhuc certi ſit traditum, neceſſe eſt vt principia ad hoc neceſſaria ex ipſis mechanicae fontibus hauriamus. In ſequentibus igitur lemmatis inueſtigabimus, cuiusmodi motum quaecunque potentiae corpus ſollicitantes producere debeant; haecque principia, quae hic ſtabiliemus, non ſolum in hoc capite, ſed etiam in omnibus ſequentibus tantae ſunt neceſſitatis, vt iis nullo modo carere queamus.

LEMMA.

117. *Si plura fuerint corpora* A, B, C, D *quae ſingula in directionibus parallelis promota perueniant in* a, b, c, d; *tum eorum commune centrum grauitatis* O *in directione quoque parallela* Oo *mouebitur, et perueniet in* o *vt ſit* $Oo = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A + B + C + D}$ *denotantibus* A, B, C, D *maſſas corporum reſpectiue.* Tab. VII. fig. 2.

Demonſtratio.

Producantur directiones A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, donec rectae $Z\delta$ pro lubitu aſſumtae occurrant in punctis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et recta ex centro grauitatis O in ω. Erit ergo ex nota centri grauitatis proprietate $Z\omega = \frac{A.Z\alpha + B.Z\beta + C.Z\gamma + D.Z\delta}{A + B + C + D}$ ex qua aequatione intelligitur, punctum ω fore veſtigium centri grauitatis tam dum corpora in A, B, C, D quam dum in *a*, *b*, *c*, *d* ſunt ſita, quare directio, in qua

G cen-

Digitized by Google

centrum grauitatis mouetur, erit parallela directionibus corporum. Deinde vero corporibus in A, B, C, D exiſtentibus erit $O\omega = \frac{A.A\alpha + B.B\beta + C.C\gamma + D.D\delta}{A+B+C+D}$ Translatis autem corporibus in *a*, *b*, *c*, *d*, perueniat centrum grauitatis in *o*, erit per eandem centri grauitatis proprietatem $o\omega = \frac{A.a\alpha + B.b\beta + C.c\gamma + D.d\delta}{A+B+C+D}$. Cum iam ſit $Oo = o\omega - O\omega$, erit $Oo = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A+B+C+D}$. Q. E. D.

Coroll.

181. Quantuscunque ergo ſit corporum numerus demonſtratio data aeque valet, ac pro caſu quatuor corporum tantum. Atque ex demonſtratione quoque intelligitur, eam pariter vim ſuam retinere ſiue corpora ſint in eodem plano ſita ſiue ſecus.

LEMMA.

Tab. VII. fig. 2.

119. *Si fuerint corporibus* A, B, C, D *potentiae* a, b, c, d *reſpectiue applicatae, quarum directiones inter ſe ſint parallelae, corporaque ab iis moueantur, tum eorum commune centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur, ac ſi omnia corpora in ipſo grauitatis centro* O *eſſent concentrata eorumque ſumma* A + B + C + D *a ſumma potentiarum* a + b + c + d *in eadem directione ſollicitaretur.*

Demonſtratio.

Promoueantur puncto temporis *dt* corpora A, B, C, D a potentiis reſpectiuis *a*, *b*, *c*, *d* per elementa A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, erit per nota mechanicae principia $Aa = \frac{a\,dt}{A}$, $Bb = \frac{b.dt}{B}$, $Cc = \frac{c.dt}{C}$, $Dd = \frac{d.dt}{D}$. Interim igitur

igitur per lemma praecedens perueniet centrum grauitatis O in o, vt ſit Oo parallela directionibus potentiarum, atque $Oo = \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. At ſi in O concentrata eſſet ſumma corporum A+B+C+D, eaque in directione Oo ſollicitaretur *a* ſumma potentiarum $a+b+c+d$, tum tempuſculo dt perueniret quoque in o vt eſſet $Oo = \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. Quare dum corpora ſingula A, B, C, D, a ſuis potentiis reſpectiuis a, b, c, d in directionibus inter ſe parallelis vrgentur, centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi ſumma corporum in O concentrata ſollicitaretur *a* ſumma potentiarum $a+b+c+d$ in eadem directione. Q. E. D.

Corollarium.

120. Haec igitur demonſtratio aeque ſuccedit, ſiue corpora ſint in eodem plano poſita, ſiue ſecus dummodo potentiarum, quibus ſingula ſollicitantur, directiones ſint inter ſe parallelae.

LEMMA.

121. *Si corpora* A, B, C, D *ſollicitentur* a *quibus, cunque potentiis, ab iisque moueantur, tum eorum centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur ac ſi in eo omnium corporum maſſae eſſent concentratae, eorumque aggregato applicatae eſſent omnes potentiae quaeque in directione parallela ei, in qua ſingula corpora, ſollicitantur.* Tab. VII. fig. 3.

Demonſtratio.

Sumantur pro lubitu tres directiones fixae ZP, ZQ, ZR inter ſe normales, et quaelibet potentia, qui-

bus corpora A, B, C, D ſollicitantur, reſoluatur in ternas, quarum directiones reſpectiue ſint parallelae directionibus ZP, ZQ, ZR. Ponatur ſumma omnium potentiarum ex hac reſolutione ortarum, quarum directiones ſunt ipſi ZP parallelae = P, ſumma earum quae ipſi ZQ ſunt parallelae = Q, earumque ſumma quae ipſi ZR ſunt parallelae = R. Iam ſi ſingula corpora tantum ab iis potentiis ſollicitarentur, quarum directiones ipſi ZP ſunt parallelae, tum centrum grauitatis O eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A+B+C+D a potentia P in directionem O*p* ipſi ZP parallela ſollicitaretur. Simili modo ſi ſingula corpora a potentiis tantum ſollicitarentur quarum directiones ſunt ipſi ZQ parallelae tum centrum grauitatis eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A+B+C+D a potentia Q, cuius directio O*q* quoque ipſi ZQ eſt parallela, vrgeretur. Denique eodem modo ſi ſingula corpora tantum a potentiis, quarum directiones ipſi ZR ſunt parallelae, ſollicitarentur, tum centrum grauitatis *o* eodem modo mouebitur, ac ſi in eo ſumma corporum A+B+C+D a potentia R in directione O*r* ipſi ZR parallela ſollicitaretur. Quare ſi ſingula corpora *ab* omnibus potentiis, quae ipſis ſunt applicatae ſimul ſollicitentur, tum centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo ſumma corporum A+B+C+D eſſet concentrata, eaque a tribus potentiis P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* ſollicitaretur. At ſi omnes potentiae, quibus ſingula corpora ſollicitantur, in directionibus ſibi parallelis in puncto O eſſent applicatae, tum iis omnibus tres potentiae P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* aequiualerent. Quamobrem centrum gra-

grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo omnia corpora eſſent concentrata, iisque omnes potentiae in iisdem directionibus eſſent applicatae. Q. E. D.

LEMMA.

122. *Si corpori rigido, cuius partes firmiſſimo nexu inter ſe cohaerent, quaecunque potentiae fuerint applicatae, eius centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eique omnes potentiae in ſuis directionibus coniunctim applicatae.*

Demonſtratio.

Concipiantur ad momentum omnes corporis particulae a ſe inuicem diſſolutae, vt earum quaeque libere a potentiis moueantur, tum ex lemmate praecedentee conſtat centrum grauitatis corporis eodem modo moueri, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eaque ab omnibus potentiis in iisdem reſpectiue directionibus coniunctim vrgeretur. Cum autem interea ſingulae corporis particulae ex mutuo ſitu, quem inter ſe tenere debent, ſint dislocatae, concipiantur eae ſeſe in debitum ordinem reſtituere, viribus, quibus ſe mutuo attrahant vel repellant. Huiusmodi autem actionibus quibus corpora in ſe mutuo agunt, locus centri grauitatis non mutatur. Quamobrem poſt reſtitutionem centrum grauitatis inuariatum manebit, atque idcirca eodem modo mouebitur ac ſi ſingulae corporis particulae a ſe inuicem eſſent diſſolutae. Mutuus igitur nexus quo corporis particulae inter ſe cohaerent, motum centri grauitatis aſſignatum non turbat. Q. E. D.

Coroll. 1.

123. Si igitur potentiae, quibus corpus ſollicitatur ita fuerint comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſe mutuo deſtruant et in aequilibrio conſiſtant, tum centrum grauitatis corporis quieſcet.

Coroll. 2.

124. At ſi potentiae corpori applicatae non fuerint ita comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſint in aequilibrio, tum centrum grauitatis corporis in media earum potentiarum directione mouebitur.

Coroll. 3.

Tab. VII. fig. 4. 125. Si igitur corpori ABC duae potentiae E*e* et F*f*, quarum altera deorſum altera ſurſum vrgeat, fuerint applicatae, tum centrum grauitatis quieſcet ſi fuerit $Ee = Ff$. At ſi $Ee > Ff$ centrum grauitatis deſcendet, aſcendet vero ſi fuerint $Ee < Ff$.

Coroll. 4.

126. Quaecunquae ergo potentiae corpori fuerint applicatae, motus centri grauitatis per hoc lemma poterit determinari.

Scholion.

127. Motus autem, quem potentiae centro grauitatis inducunt, non eſt ſolus effectus quem potentiae in corpore producunt, neque ad effectum potentiarum corpori applicatarum ſufficit motum centri grauitatis noſſe. Inte-

Interea enim dum centrum grauitatis vel quieſcit, vel deſcripto modo mouetur, fieri poteſt, vt reliquae corporis partes circa centrum grauitatis reuoluantur, motumque gyratorium accipiant, quippe quo motu centri grauitatis motus non turbatur. Quamobrem ſupereſt, vt inveſtigemus cuiusmodi motum gyratorium quaevis potentiae corpori applicatae circa centrum grauitatis producant, hoc enim cognito integer effectus, quem potentiae in corporibus rigidis edere poſſunt, innoteſcet.

LEMMA.

128. *Si corpori rigido quaecunque potentiae fuerint applicatae, idque ab iis moueatur ita ut centrum grauitatis eum obtineat motum, quem ipſi aſſignauimus, totum corpus interea circa centrum grauitatis pariter mouebitur, ac ſi centrum grauitatis quieſceret vel fixum eſſet.*

Demonſtratio.

Concipiatur corpori in ipſo centro grauitatis potentia noua applicata aequalis et contraria ei quae oritur ex compoſitione omnium potentiarum ſi eſſent in centro gravitatis applicatae, tum igitur centrum grauitatis quieſcet. Si nunc hoc caſu determinetur motus, quem potentiae corpori circa centrum grauitatis inducunt, potentia noua, quam corpori in centro grauitatis applicatam concipimus, motum hunc circa centrum grauitatis non afficiet. Quare etiamſi, ea iterum auferatur, motus circa centrum grauitatis immutatus manebit. Hanc ob rem corpus, circa centrum grauitatis motum eodem modo mouebitur, ac ſi eſſet fixum. Q. E. D.

Coroll.

Digitized by Google

Corollarium.

129. Ad motum igitur corporis circa centrum grauitatis determinandum, licebit centrum grauitatis tanquam fixum conſiderare, cum motus gyratorius circa centrum grauitatis motum conueniat cum motu gyratorio circa centrum grauitatis fixum.

Scholion.

130. Quo ergo determinemus hunc circa centrum grauitatis motum, incipiemus a motu circa quodcumque punctum fixum definiendo, atque inueſtigabimus motum gyratorium, quem quaecunque potentiae corpori ex quopiam puncto fixo ſuſpenſo inducere valent. Hoc enim determinato facile erit punctum fixum in ipſum centrum grauitatis transferre atque adeo motum, quem potentiae quaecunque corpori applicatae circa centrum grauitatis generant aſſignare.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 1. 131. *Si corpuſculum* C *circa punctum fixum* O *mobile ſollicitetur a potentia* CF, *erit angulus dato tempuſculo* dt *circa* O *genitus directe vt factum ex potentia* CF *in ſin. ang.* FCO *per* dt *multiplicatum et reciproce vt maſſa corpuſculi* C *in diſtantiam* CO *ducta.*

Demonſtratio.

Poſitis potentia $CF = p$ et ſin. ang. $FCO = m$, reſoluatur potentia CF in duas laterales ſecundum Cf normalem ad CO et $C\varphi$ ipſam CO, quarum poſterior tota in tendendo filo CO vel immutanda corpuſculi a C dis-

tantia conſumetur, ideoque ad motum nihil praeſtat. Altera vero potentia in directione Cf, quae erit $= mp$, tota in motu producendo impendetur. Perducatur igitur corpuſculum C tempuſculo dt per ſpatiolum Cc, erit $Cc = \frac{mpdt}{C}$. Hoc vero ſpatiolum per diſtantiam CO diuiſum dabit angulum COc tempuſculo dt genitum qui conſequenter erit $= \frac{mpdt}{C.CO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

132. Si ergo huic angulo, qui dato tempuſculo generatur, vis gyratoria proportionalis ponatur, erit vis gyratoria vt potentia CF in ſin. ang. FCO diuiſa per corpus C in diſtantiam CO.

Coroll. 2.

132. Si igitur vis gyratoria perpetuo iſta ratione exprimatur, tum ſtatim cognoſcetur motus angularis. Expreſſio enim talis vis gyratoriae per tempuſculum dt multiplicata exhibet ſtatim angulum hoc tempuſculo genitum circa O.

Coroll. 3.

134. Atque ſi vis gyratoria compoſiti cuiusque corporis hoc modo expreſſa inueniatur, tum ſtatim angularis motus congnoſcetur, ſeu quod idem eſt, aſſignari poteſt corpus ſolitarium vt C, quod a certa potentia ſollicitatum aequalem motum gyratorium habeat.

Scholion.

135. Cum potentia oblique corpuſculum C trahens tam facile ad potentiam normalem ad CO reducatur,

atque altera potentia, cuius directio in ipſam CO incidit, motum gyratorium non afficiat; in ſequentibus, vbi motus gyratorius determinari debet, tantum potentias normales cuique corporis particulae applicatas concipiemus. Et quidem ſi C fuerit particula corporis circa O mobilis, ex hoc lemmate iam conſtat, ſi ſola particula C adeſſet, reliquis corporis partibus omnibus annihilatis, qualem motum gyratorium potentia Cf normalis ad CO corpuſculo C induceret. Scilicet corpuſculum C ad circulum deſcribendum incitabitur, cuius centrum eſt in O et radius AO, atque iſte circulus ſitus erit in plano, in quo ſitae ſunt cum recta CO tum potentiae ſollicitantis Cf directio. Vis autem qua ad hunc circulum deſcribendum incitatur, ſeu vis gyratoria, prout eam vocabimus, erit aequalis potentiae Cf diuiſae per factum ex maſſa corpuſculi C in diſtantiam CO.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 2. 136. *Loco corporis* A *a potentia* Aa *circa* O *ad motum gyratorium incitati*, *ſubſtitui poteſt in diſtantia* MO, *quae in eodem plano*, *in quo* AO *et* Aa, *ſita eſt*, *corpus* $M = \frac{A.AO^2}{MO^2}$, *quod a potentia* $Mm = \frac{MO.\,Aa}{MO}$, *cuius directio in eodem plano eſt ſita et in eandem*, *in quam* Aa *plagam tendit*, *ad motum gyratorium circa* O *ſollicitetur.*

Demonſtratio.

Quo loco potentiae Aa in diſtantia AO applicatae ſubſtitui queat potentia Mm in diſtantia MO applicata, oportet vt primo MO et Mm in eodem plano ſint ſitae, in quo ſunt AO et Aa; deinde vero requiritur vt mo-

momenta potentiarum A*a* et M*m* ſint aequalia, vnde ſequitur fore $Aa. AO = Mm. MO$ ſeu $Mm = \frac{Aa. AO}{MO}$. Hoc enim pacto potentia M*m* eundem praeſtabit effectum circa O, quem habet potentia A*a* circa O. Praeterea vero corpus in M collocandum tantum eſſe debet, vt vires gyratoriae in M et A circa O ſint aequales, quod eueniet, ſi fuerit $\frac{Mm}{M. MO} = \frac{Aa}{A. AO}$. Quo ergo et vis gyratoria vtrinque ſit eadem, neceſſe eſt vt ſit $M = \frac{A. AO. Mm}{MO. Aa} = \frac{A. AO^2}{MO^2}$ propter $Mm = \frac{Aa. AO}{MO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

137. Perinde igitur eſt in qua directione aſſumatur recta MO, modo ea in eodem plano ſit ſita, in quo poſitae ſunt rectae AO et A*a*. Atque ſimili modo arbitrarium eſt quantumvis longa MO capiatur.

Coroll. 2.

138. Definita autem longitudine rectae MO in plano OA*a* poſitae, ſimul tam corpus in M collocandum, quam potentia ei applicanda M*m* determinantur.

Coroll. 3

139. Loco ergo cuiusuis corpuſculi A circa punctum fixum O gyrantis aliud in data diſtantia ſubſtitui poteſt, quod prorſus eundem praeſtet effectum in motu gyratorio circa O generando, quem produceret illud corpuſculum A in diſtantia AO.

LEMMA.

140. *Si fuerint plura corpuſcula* A B, C, D *inter ſe firmiter connexa et in eodem plano ſita quae a poten-* Tab. VIII. fig. 3.

H 2 *tiis*

tiis Aa, Bb, Cc, Dd, *quarum directiones in eodem quoque plano ſint poſitae, circa punctum fixum* O *in eodem plano ſitum ad motum gyratorium ſollicitentur, erit vis gyratoria communis* $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$.

Demonſtratio.

Sumta in plano, in quo ſita ſunt tum corpuſcula cum puncto O, quam directiones, quibus ſollicitantur, recta arbitraria OM, loco corpuſculi A a potentia Aa ſollicitati ſubſtituatur in M corpuſculum $\frac{A \cdot AO^2}{MO^2}$ a potentia $\frac{Aa \cdot AO}{MO}$ ſollicitatum (136), ſimilique modo loco corpuſculorum B, C, D a potentiis Bb, Cc, Dd, ſollicitatorum, in M ſubſtituantur corpuſcula $\frac{B \cdot BO^2}{MO^2}$, $\frac{C \cdot CO^2}{MO^2}$, $\frac{D \cdot DO^2}{MO^2}$ a potentiis $\frac{Bb \cdot BO}{MO}$, $\frac{Cc \cdot CO}{MO}$, $\frac{Dd \cdot DO}{MO}$ ſollicitata. Hoc ergo facto loco omnium corpuſculorum a ſuis potentiis ſollicitatorum ſubſtitui poteſt in M Corpus $\frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}{MO^2}$, quod ſollicitetur in directione Mm a potentia quae eſt $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BC + Cc \cdot CC + Dd \cdot DO}{MO}$. Huius igitur corporis vis gyratoria erit $= \frac{Aa \cdot AC + Bb \cdot BC + Cc \cdot CC + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BC^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$ cui aequalis eſt vis gyratoria, quae ex viribus gyratoriis ſingulorum corporum, A, B, C, D, coniunctim oritur. Q. E. D.

Coroll. 1.

141. Vis ergo gyratoria plurium huiusmodi corpuſculorum aequatur ſummae momentorum ſingularum potentiarum in punctum fixum A, diuiſae per ſummam factorum ex ſingulis corpuſculis in quadrata eorum a pun-

cto

cto fixo O ſeu ab axe, circa quem fit motus gyratorius multiplicatis.

Coroll. 2.

142. Angulus igitur, per quem corpuſculorum A, B, C, D ſyſtema tempuſculo dt circa punctum fixum o gyrabitur erit $= dt - \frac{Aa \cdot AO + Bb. BO + Cc \cdot CO + Dd. DO}{A \cdot AO^2 + B. BO^2 + C\ CO^2 + D \cdot DO^2}$ vnde ipſe motus gyratorius cognoſcetur.

Coroll. 3.

143. Si aliquot corpuſcula in plagam oppoſitam trahantur, tum potentiarum, quibus ea ſollicitantur momenta fient reſpectu reliquorum negatiua, ideoque in expreſſione inuenta ſubtrahi debebunt.

Coroll. 4.

144. Manentibus ergo potentiis corpus circa punctum fixum O ſollicitantibus iisdem, vis gyratoria eo erit maior, quo minor fuerit denominator fractionis inuentae, hoc eſt quo propius ſingulae corporis particulae puncto O fuerint ſitae.

Coroll. 5.

145 Si anguli, quos potentiarum ſollicitantium directiones cum rectis ad punctum O ductis conſtituunt, non fuerint recti, tum ſingula ſacta A*a*. AO, A*b*. BO etc. inſuper per ſinus angulorum OA*a*, OB*b* etc. reſpectiue multiplicari debent; ſumta vnitate pro ſinu toto.

Coroll. 6.

146. Vis ergo gyratoria euaneſcet, ſi momenta potentiarum corpus ſollicitantium in punctum fixum ſe mutuo deſtruant; hoc ergo caſu corpus quieſcet.

Scholion.

147. Haec igitur ſunt lemmata, quibus ad motum corporum aquae innatantium explicandum opus erit; ex quibus ſatis intelligitur, ſi corpori cuicunque rigido applicatae ſint potentiae quaecunque, tum corporis illius centrum grauitatis eodem modo moueri, ac ſi tota corporis maſſa in ipſo centro grauitatis eſſet concentrata, eique omnes potentiae quaeque in ſua directione coniunctim eſſent applicatae. Praeterea vero totum corpus interim circa centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi centrum grauitatis eſſet fixum, hicque motus gyratorius cognoſcetur ex momentis omnium potentiarum in centrum grauitatis. Si enim haec momenta ſe mutuo deſtruant, tum corpus plane nullum habebit motum gyratorium circa centrum grauitatis; eo maior vero erit hic motus gyratorius quo maius fuerit momentum ex omnibus potentiis in centrum grauitatis coniunctim ortum. In motu quidem corporum aquae innatantium iſte motus gyratorius ſi quis oritur ſtatim ſiſtitur, et hancobrem hoc caſu ſufficiet eum corporis ſitum determinare in quo motus gyratorius ceſſat; ad quem definiendum lemmata praemiſſa ſunt accommodata.

PROPOSITIO 15.

Theorema.

148. *Si corpus aquae inſidens non fuerit in aequilibrio, tum conuertetur circa centrum grauitatis, atque centrum grauitatis interea vel quieſcet vel directe ſurſum deorſumue mouebitur.*

De-

Demonſtratio.

Si corpus aquae quomodocunque immergatur id a duabus viribus vrgebitur, quarum altera aequalis eſt ponderi corporis, et in verticali per centrum grauitatis tranſeunte deorſum tendit, altera vero aequalis eſt ponderi aquae volumine partem aquae ſubmerſam aequantis, et corpus directe ſurſum pellit in directione per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeunte. Cum igitur centrum grauitatis ab his potentiis eundem accipiat motum, ac ſi tota corporis maſſa in eo eſſet concentrata et ab vtraque vi coniunctim ſollicitaretur, manifeſtum eſt centrum grauitatis vel quieſcere vel directe ſurſum deorſumue moueri debere. Niſi autem directio potentiae, qua corpus ſurſum vrgetur, per centrum grauitatis tranſeat, tum corpus ab hac vi interea circa grauitatis centrum convertetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

149. Intelligitur ergo, ſi nimis magna pars corporis aquae fuerit immerſa, tum propter vim ſurſum vrgentem altera maiorem, centrum grauitatis aſcendere debere; contra vero ſi nimis exigua pars aquae immergatur, centrum grauitatis deſcendere debere.

Coroll. 2.

150. Si ergo tanta pars corporis aquae eſt immerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum centrum grauitatis quieſcet propter vires ſollicitantes inter ſe aequales et contrarias.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 3.

151. Si igitur tanta corporis pars aquae fuerit ſubmerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum corpus ſeſe in aequilibrium reſtituendo circa centrum grauitatis quieſcens conuertetur.

Scholion.

152. Hinc autem non ſequitur, quod, ſi ſemel tanta corporis pars aquae fuerit ſubmerſa, quanta ad aequilibrium producendum eſt neceſſaria, tum centrum grauitatis, quam diu conuerſio fit, perpetuo quieſcere debere. Inter conuertendum enim vtique euenire poteſt, vt pars corporis ſub aqua exiſtens, quippe quae continuo immutatur, fiat iuſto vel maior vel minor. Hoc igitur cum accideret, neceſſe eſt, vt centrum grauitatis ſtatim vel eleuetur vel deprimatur. Ipſe autem motus tum centri grauitatis tum conuerſionis non e veſtigio ceſſabit, cum corpus in ſtatum aequilibrii peruenerit, ſed prout in motu pendulorum euenit, in partem contrariam inclinabitur et reuertetur, hicque motus oſcillatorius tam diu durabit, quoad a reſiſtentia omnino abſorbeatur.

PROPOSITIO 16.

Problema.

Tab. IX. fig. 1. 153. Figurae planae aquae verticaliter inſiſtentis EAHBF ex ſitu aequilibrii depulſae, motum quo ſe in ſitum aequilibrii reſtituet, determinare.

Solutio.

Sit AHB pars aquae immerſa, O eius centrum magnitudinis et G centrum grauitatis totius figurae, quae

centra

centra in plano AHB erunt poſita. Sollicitabitur ergo haec figura a preſſionibus aquae ſurſum in directione verticali OI vi aequali ponderi aquae ſpatium AHB occupantis; deorſum vero vrgebitur in directione GH vi ponderi figurae aequali. Quod iam ad motum centri grauitatis G attinet, id ſurſum pelletur, ſi vis OI fuerit maior quam vis GH; deorſum vero nitetur ſi vis GH vim OI ſuperet; caſu denique quo hae vires ſunt inter ſe aequales, centrum grauitatis G quieſcet. Deinde ſiue centrum grauitatis quieſcat ſiue aſcendat ſiue deſcendat, tota figura circa id conuertetur, niſi directiones OI et GH in eandem rectam verticalem incidant; qui motus conuerſionis ex momentis harum virium in centrum grauitatis cognoſcetur. Vis quidem GH, quippe quae per centrum ipſum grauitatis tranſit, momentum eſt nullum, at alterius vis OI momentum eſt OI. GL ducta GL ex G in rectam OI normali. Hac igitur vi figura ſecundum directionem BHA circa centrum grauitatis G conuertetur. Quantitas autem huius vis gyratoriae abſoluta pendet inſuper a ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G, quorum productorum ſumma ſi dicatur S, erit vis gyratoria $= \frac{OI.GL}{S}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

154. Impetus ergo, quo figura circa G conuertetur eo erit maior, quo maiores fuerint tum vis OI tum diſtantia GL, atque quo minor fuerit ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G.

Digitized by Google

Coroll. 2.

155. Manentibus ergo OI et GL invariatis vis figurae ſe reſtituendi eo erit maior, quo minor fuerit S, hoc eſt quo propiores fuerint omnes figurae particulae centro grauitatis G. Contra vero reſtitutio eo tardius fiet, quo magis particulae a centro grauitatis remoueantur.

Coroll. 3.

Tab. IX fig. 1. et 2.

156. Vis gyratoria, qua figura circa centrum grauitatis conuertitur, reduci poteſt ad vim qua ſimplex corpus a circa punctum fixum *oa* vi *ab* vrgetur. Eadem ſcilicet velocitate hoc corpus *a* gyrabitur, qua figura EHBF, ſi fuerit vis $ab = \frac{a.ao.GL}{S}$. OI.

Coroll. 4.

157. Datis ergo ſingulis momentis, dum figura conuertitur, ſitu centrorum grauitatis et magnitudinis mutuo, determinari poterit velocitas angularis quouis momento, atque tempus, quo tota reſtitutio abſoluitur.

Scholion. 1.

158. Si corpus aquae inſidens fuerit cylindricum, cuius omnes ſectiones transuerſales ſint ſimiles et aequales figurae EAHBF, manifeſtum eſt hoc corpus in aqua ſimili modo motum iri quo figura ſola EAHBF. Quamobrem ſi huiusmodi corpus cylindricum ita fuerit ex ſtatu aequilibrii depulſum, vt omnes illae ſectiones in ſitu verticali permaneant, tum hoc corpus circa rectam horizontalem per ſingularum ſectionum centra grauitatis G tran-

tranſeuntem tanquam circa axem conuertetur, donec in ſtatum aequilibri peruenerit. Atque praeterea motus huius reſtitutionis omnino congruet cum motu figurae EAHBF et eadem celeritate abſoluetur. Vis ergo, qua corpus hoc, dum ſingularum ſectionum partes ſimiles et aequales ipſi AHB aquae ſunt ſubmerſae, circa axem per omnium ſectionum centra grauitatis G tranſeuntem conuertetur, aequalis erit ponderi aquae volumine toti parti ſubmerſae aequali ducto in interuallum LG et diuiſo per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe conuerſionis multiplicatarum.

Scholion 2.

159. Quemadmodum hoc corpus cylindricum, cuius omnes ſectiones tranſuerſales non ſolum ſunt ſimiles et aequales, ſed etiam onera per eas ſimiliter ſunt digeſta, circa axem immobilem per centrum grauitatis tranſeuntem conuerti poteſt, ita quoque idem in aliis cuiusque formae corporibus euenire poteſt, vt circa axem immotum gyrari queant. Plerumque autem iſte motus reſtitutionis in ſtatum aequilibrii non circa axem quieſcentem, ſed pariter circa centrum grauitatis mobilem fieri ſolet, qui ipſius axis motus difficulter determinatur. Interim tamen ſemper qualiscunque fuerit corporis circa centrum grauitatis motus, is tanquam compoſitus ſpectari poteſt ex motibus circa duos axes factis, qui conceptus ita ſe habet, vt dum corpus circa axem quendam gyratur, eodem tempore quoque circa alium axem conuerti concipiendum ſit. Quin etiam fieri poteſt, vt motus circa centrum grauitatis ex mo-

motibus circa tres axes ſit compoſitus. Quamobrem quo huiusmodi motus curatius perſequi liceat, ante nobis inveſtigandae ſunt leges motus gyratorii circa axem fixum, quae deinde etiam ad motum ex aliquibus huiusmodi motibus compoſitum accommodari queant.

LEMMA.

Tab. XI. fig. 3.

160. *Si corpori, quod axe fixo* EF *eſt traiectum, applicatae fuerint quaecunque potentiae, erit vis gyratoria circa axem* EF *aequalis ſummae momentorum omnium potentiarum corpori applicatarum in axem* EF *diuiſae per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe* EF *multiplicatarum.*

Demonſtratio.

Ex punctis A, B, C, D in quibus vires ſunt applicatae in axem EF demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c*, D*d*; perſpicuum autem eſt vim B applicatam eundem effectum in corpore circa EF conuertendo habere, ac ſi recta B*b* in quodlibet aliud axis punctum promoueatur. Quamobrem puncta omnia *a*, *b*, *c*, *d* in idem punctum a incidere concipiantur, ita vt ſimul omnes corporis particulae in planum ad EF normale et per *a* tranſiens collocentur. Quo facto totum corpus in hoc planum reductum pari modo circa punctum fixum a ad gyrandum incitabitur a potentiis, atque ante: Quocirca vis gyratoria aequalis erit ſummae momentorum potentiarum omnium in axem EF diuiſae per aggregatum omnium particularum per ſuarum ab axe EF diſtantiarum quadrata multiplicatarum. Q. E. D.

Co-

Coroll. 1.

161. Si igitur corporis, quod circa axem fixum mobile exiſtit, vis gyratoria orta a quibuscunque potentiis ipſi applicatis determinari debeat, primo ſingulae corporis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe illo fixo ſunt multiplicandae et in vnam ſummam coniiciendae.

Coroll. 2.

162. Inuenta vero hac ſumma omnium productorum ex ſingulis particulis in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe fixo, quaeri debent momenta potentiarum reſpectu iſtius axis, quarum aggregatum per illam ſummam diuiſum exhibebit vim gyratoriam circa axem.

Coroll. 3.

163. Cognita autem vi gyratoria, ſi ea per elementum temporis multiplicetur, productum dabit elementum celeritatis gyratoriae hoc tempuſculo genitum; vnde totus motus gyratorius eodem modo determinari poterit quo motus corporis a potentia ſollicitati in directum.

Scholion.

164. Intelligitur ex demonſtratione regulam datam pro inuenienda vi gyratoria aeque locum habere, ſiue axis per centrum grauitatis corporis tranſeat ſiue ſecus. Interim tamen ob ſupra allatas cauſas alius axis per ſe immobilis eſſe non poteſt, niſi qui per centrum grauitatis tranſit. Inſeruiet igitur haec regula quoque, ſi corpus fuerit mobile circa axem non quidem per centrum graui-

Digitized by Google

tatis tranſeuntem, verum qui ab aliena vi fixus teneatur.

Definitio.

165. Momentum inertiae corporis reſpectu axis cuiusdam fixi voco aggregatum omnium corporis particularum per ſuarum reſpectiue ab hoc axe diſtantiarum quadrata multiplicatarum.

Coroll. 1.

166. Si ergo corpori circa fixum quempiam axem mobili potentiae fuerint applicatae, vis gyratoria exprimetur aggregato momentorum potentiarum reſpectu huius axis, diuiſo per momentum inertiae ipſius corporis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 2.

167. Cum infiniti eſſe poſſint axes, circa quos corpus datum moueri poteſt, infinita etiam quodlibet corpus habebit momenta. Hancobrem ſi de momento corporis ſermo eſt, ſimul definiri debet axis, cuius reſpectu momentum inertiae accipitur prout in definitione eſt declaratum.

Scholion 1.

168. Hanc momenti inertiae vocem breuitatis gratia introducere viſum eſt, quo tam amplae deſcriptiones, quae ſaepiſſime occurrerent, euitentur. Quemadmodum enim in motu rotatorio momentum potentiae vocatur potentia ad effectum iam applicata, ita etiam commode in corporibus gyrantibus aggregatum omnium illorum productorum

Digitized by Google

rum momentum inertiae corporis appellatur, cum vicem maſſae ſeu inertiae ad effectum applicatae ſuſtineat.

*S*cholion 2.

169. Quo de huiusmodi corporum momentis inertiae clariorem notitiam acquiramus, iuuabit corporum quorumdam momenta inueſtigaſſe, quae etiam in ſequentibus vſum habere poterunt. Axes autem tantum conſiderabo per centrum grauitatis tranſeuntes, et eorum reſpectu momenta determinabo; cum infra ſim oſtenſurus, quomodo ex datis momentis inertiae reſpectu axium per centrum grauitatis tranſeuntium momenta reſpectu aliorum quorumque axium inueniri queant.

Exemplum 1.

170. Sit priſma triangulare rectum $ABCabc$ ex materia conſtans vniformi, cuius maſſa ſit $= M$. Tranſeat per eius centrum grauitatis axis verticalis Gg, qui ſimul per ſingularum ſectionum transverſalium centra grauitatis tranſibit, erit momentum inertiae huius priſmatis reſpectu huius axis $= \frac{M(AB^2 + AC^2 + BC)}{36}$. Tab. XI. fig 4.

Exemplum 2.

171. Sit priſma quadrangulare rectum ſeu parallelepipedum $ABCDabcd$, cuius baſes $ABCD$ et $abcd$ ſint parallelogramma, ex materia vniformi conſtans et maſſam habens $= M$. Ductus ſit per eius centrum grauitatis axis Gg, per vtriusque baſis centra grauitatis G et g tranſiens, erit momentum inertiae huius parallelepipedi Tab. IX. fig. 5.

Digitized by Google

di reſpectu huius axis $= \frac{M(AB^2 + BC^2)}{12}$. Siue ergo baſes ſint rectangulae ſiue obliquangulae, momentum inertiae pari modo ex ſolis lateribus et maſſa determinatur.

Exemplum 3.

Tab. X. fig. 1. 172. Sit corpus cylindrus rectus ABCD *abcd*, cuius baſes ABCD et *abcd* ſint circuli, ex materia vniformi conſtans eiusque maſſa $= M$. Traiiciatur iſte cylindrus axe G, *g*, baſium centra iungente, erit momentum inertiae huius cylindri reſpectu axis $Gg = \frac{M.\,AG^2}{2} = \frac{M \cdot AB^2}{8}$.

Coroll.

173. Si ex praecedentibus prismatibus et cylindris ſecentur pyramides et coni recti earumdem baſium et altitudinum, erunt eorum momenta inertiae reſpectu eorundem axium quinquies minora, quam momenta prismatum et cylindrorum. Maſſae enim fiunt priorum trientes, alterique factores ad priores rationem 3 : 5. tenent.

Exemplum. 4.

174. Si autem in eodem cylindro per centrum grauitatis O ducatur axis transuerſus PQ normalis ad priorem axem G*g*, erit cylindri momentum inertiae reſpectu huius axis $PQ = M\left(\frac{Gg^2}{12} + \frac{AB^2}{16}\right)$.

Exemplum 5.

Tab. XI. fig. 2. 175. Si globi ex materia vniformi conſtantis, cuius maſſa eſt M. momentum inertiae requiratur reſpectu diametri AB, perinde enim eſt quaecunque diameter accipiatur

piatur, reperietur hoc momentum $= \frac{2}{5}$ M. AG² ſeu $= \frac{M \cdot AB^2}{10}$. Producti ſcilicet ex maſſa in quadratum diametri pars decima dat globi momentum inertiae reſpectu cuiusque axis per centrum tranſeuntis.

Exemplum 6.

176. Si corpus fuerit ſphaeroides ellipticum, genitum ex rotatione ellipſis ACBD circa axem AB, ex materia vniformi conſtans, eiusque maſſa $= M$. erit eius momentum inertiae reſpectu axis AB, qui ſimul eſt axis ſphaeroidis $= \frac{M \cdot CD^2}{10}$. Momentum vero inertiae eiusdem ſphaeroidis reſpectu axis CD ad priorem axis normalis erit $= \frac{M(AB^2 + CD^2)}{20}$. Eſt vero ſphaerae diametri AB ſoliditas ad ſoliditatem huius ſphaeroidis vt AB^2 ad CD^2. Tab. X. fig. 3.

Scholion 3.

177. Modum, quo horum corporum momenta inertiae ſunt inuenta, ſuperfluum viſum eſt hic apponere, cum mera conſtet analyſi, atque ab aliis, qui calculum centri oſcillationis tradiderunt, iam ſatis ſit expoſitus. Quo autem, ſi corpora fuerint magis compoſita et irregularia, vel ſi momenta reſpectu aliorum axium, qui per centrum gravitatis non tranſeunt, requirantur, totum negotium ſine maxime taedioſo calculo abſoluit queat, ſequens lemma adiunxi.

LEMMA.

178. *Dato momento inertiae cuiusque corporis reſpectu axis* AB *per corporis centrum grauitatis* G *tranſeuntis, inuenire eiusdem corporis momentum inertiae reſpectu alius cuiusuis axis* CD *priori axi* AB *paralleli.* Tab. X. fig. 4.

K Solutio

Solutio.

Sit maſſa corporis $= M$ et momentum inertiae eius reſpectu axis $AB = S$. Ducatur recta HG parallelos axes normaliter ſecans, quo habeatur diſtantia axium GH, ſeu diſtantia centri grauitatis corporis, ab axe CD cuius reſpectu momentum inertiae quaeritur. Conſideretur corporis quaecunque molecula m, ex eaque in planum $ABDC$ in quo ſiti ſunt axes, perpendiculum mQ demittatur. Agatur QRS parallela ipſi GH, itemque mR et mS, quae in axes erunt normales. Quaeſito ergo ſatisfiet ſi ſumma omnium $m.\ mS^2$ definiatur; quam per $\int m.\ mS^2$ indicemus. Momentum vero huius corporis reſpectu axis AB eſt $= \int m.\ mR^2$, quod cum detur, erit $\int m.\ mR^2 = S$; at $\int m$ ſeu ſumma omnium corporis molecularum aequatur maſſae toti M. Cum iam ſit $MS^2 = mR^2 + SR^2 + 2\,SR.\,RQ$ erit $\int m.\ mS^2 = \int m.\ mR^2 + \int m.\ SR^2 + 2\int m.\ SR.\,RQ = \int m.\ mR^2 + SR^2.\ \int m + 2\,SR\int m.\ RQ$. ob $SR = GH$ ideoque conſtans. Quia autem AB per corporis centrum grauitatis G tranſit, erit per notam centri grauitatis proprietatem $\int m.\ RQ = 0$. Quare cum ſit $\int m.\ mR^2 = S$ et $\int m = M$ erit quaeſitum corporis propoſiti momentum inertiae reſpectu axis $CD = S + M.\,GH^2$. Q. E. I.

Coroll. 1.

179. Momentum ergo inertiae corporis reſpectu axis CD aequale eſt momento inertiae eiusdem corporis reſpectu axis AG per centrum grauitatis *G* tranſeuntis, vna cum facto ex maſſa in quadratum diſtantiae centri grauitatis G ab axe CD.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 2.

180. Dato ergo momento inertiae corporis reſpectu axis cuiusdam per centrum eius grauitatis tranſeuntis, facile determinabitur eiusdem corporis momentum inertiae reſpectu alius cuiusque axis illi axi paralleli.

Coroll. 3.

181. Si igitur corpus, cuius momentum inertiae reſpectu axis cuiusvis quaeritur, ex pluribus compoſitum ſit partibus, quarum ſingularum momenta reſpectu axium illi axi parallelorum et per cuiusque partis centrum grauitatis tranſeuntium dantur, erit momentum inertiae quaeſitum aequale ſummae omnium momentorum partium vna cum productis ex ſingulis partibus per quadrata diſtantiarum cuiusque centri grauitatis ab axe illo multiplicatis.

Coroll. 4.

182. Hinc igitur manat modus facilis quo citra calculum corporis maxime compoſiti momentum inertiae reſpectu cuiusvis axis inuenire licet.

Scholion.

183. Ex his ſequitur modus facilis et maxime naturalis determinandi centrum oſcillationis in corporibus quibuscunque circa axem oſcillantibus, quem, etiamſi is huc non pertineat, tamen hic apponi conueniet. Sit Tab. XI. fig. 1. corpus quodcunque, quod oſcilletur circa axem horizontalem per O tranſeuntem, atque C punctum in verticali OC ſitum, in quod corporis centrum grauitatis incidet,

ita vt OC ſit diſtantia centri oſcillationis ab axe. Conſideremus autem corpus extra ſitum verticalem detruſum, eiusque centrum grauitatis in G, ita vt ipſi angulus GOC ſit deſcribendus, donec in ſitum aequilibrii pertingat. Vis autem, quae corpus ad hunc motum angularem ſollicitat, eſt pondus corporis quo in directione GH deorſum vrgetur. Sit nunc maſſa ſeu pondus corporis $= M$ eiusque momentum inertiae reſpectu axis per centrum grauitatis G tranſeuntis et axi oſcillationis paralleli $= S$ erit huius corporis momentum reſpectu axis oſcillationis $= S + M.OC^2$. Momentum autem grauitatis ad motum angularem circa O generandum eſt $M.GO.\text{ſin}.O$; ideoque vis gyratoria erit $= \frac{M\cdot GO\cdot \text{ſin}\cdot O}{S+M.OC^2}$. Contemplemur nunc pendulum ſimplex og aequali angulo goc a ſitu verticali oc diſtans cui in g ponduſculum infinite paruum p ſit alligatum circa o oſcillans, erit vis gyratoria, qua ponduſculum p ad angulum goc abſoluendum animatur $= \frac{\text{ſin}\ O}{OC}$. Si ergo haec vis gyratoria aequalis fuerit priori, pendulum ſimplex og et compoſitum OG ſimul in ſitum verticalem peruenient, quia vtrique aequalis angulus eſt percurrendus. Faciamus ergo $\frac{M\cdot CO\cdot \text{ſin}\cdot O}{S+M\cdot OC^2} = \frac{\text{ſin}.\ o}{oc}$ prodibit $oc = \frac{S+M\cdot CO^2}{M\cdot CO}$ quae eſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſeu diſtantia centri oſcillationis in pendulo compoſito OC ab axe oſcillationis, erit ergo centrum oſcillationis in Z, vt ſit $OZ = CO + \frac{S}{M\cdot CO}$; Vnde apparet centrum oſcillationis perpetuo infra centrum grauitatis G cadere, eſſeque interuallum $CZ = \frac{S}{M\cdot CO}$.

Hypotheſis.

Tab. XI. fig. 2. 184. In omnibus corporibus aquae innatantibus praecipue vero in nauibus concipere licet tres axes per centrum

Digitized by Google

trum grauitatis G tranſeuntes inter ſe normales, primum verticalem ſcilicet CGD, ſecundum horizontalem AGB ſpinae RS parallelum, in plano diametrali ſitum ARSB et tertium EGF pariter horizontalem, ſi quidem nauis fuerit in ſtatu aequilibrii, et ad priorem AGB normalem. Deinde ponere licet corpus huiusmodi a viribus ſollicitantibus circa vnumquemque horum axium ita conuerti poſſe, vt motus gyratorius circa vnum horum axium non turbetur a motibus gyratoriis circa reliquos.

Scholion 1.

185. Ex ſuperioribus ſatis intelligitur corpus circa alium axem liberum et immotum gyrari non poſſe, niſi circa quem omnes vires centrifugae ſe deſtruant. Quamobrem ſi vires ſollicitantes corpus circa alium axem rotare conentur, motus orietur maxime irregularis, cum etiam axis inclinetur; quem motum definire difficillimum etiamnum eſt. Huic igitur incommodo medela afferetur, ſi talis motus irregularis reſolui poſſet in duos vel tres motus rotatorios circa axes fixos ſimul factos; tum enim cognito motu circa quemque axem ſeorſim, motus totus inde facile colligeretur. Quamuis autem haec reſolutio accurate non ſuccedat, tamen ſi ad praxin reſpiciamus, tuto ſatis adhiberi poterit, ſi tres illi axes inter ſe fuerint normales; tum enim motus circa vnum minime a motibus circa reliquos turbabitur. Praeterea vero ſi hi axes ita ſint comparati vt corpus circa quemlibet ſeorſim immotum gyrari queat, reſolutio iſta eo magis veritati erit conſentanea. In nauibus autem, ad quas hanc tractationem praecipue accomodare inſtitui, huiusmodi tres axes

Digitized by Google

vel reuera vel proxime adeſſe ſolent. Quaelibet enim nauis circa axem verticalem CD immotum gyrari poteſt, atque etiam circa axem AB, quippe qui in plano diametrali eſt ſitus; tertius autem axis EF pari praerogatiua gaudet, prout experientia ſatis euincit.

Coroll. 1.

186. Si ergo huiusmodi corpori vna pluresue potentiae fuerint applicatae, earum effectus tam in corpore promouendo, quam gyrando circa centrum grauitatis ex hactenus traditis praeceptis facile determinabitur. Primo enim omnes potentiae in directionibus ſibi parallelis centro grauitatis concipiantur applicatae, ex iiſque motus progreſſiuus centri grauitatis concludatur. Deinde ſingularum potentiarum momenta in ternos illos axes quaerantur, ex quibus motus rotatorius circa quemvis axem ſeorſim cognoſcetur. Collatis denique his motibus rotatoriis inter ſe, verus motus circa centrum grauitatis ſatis accurate colligetur.

Coroll. 2.

187. Tria ergo requiruntur ad hos motus determinandos cuiuſque corporis momenta inertiae reſpectu trium ſcilicet axium circa quos rotatio fieri concipitur.

Coroll. 3.

188. Si igitur in corpore tres huiusmodi axes inter ſe normales dentur, atque momentum corporis reſpectu cuiusque axis fuerit aſſignatum, tum quaecunque potentiae hoc corpus ſollicitent, verus motus ab iis productus quam proxime poterit determinari: in hunc autem finem lemma ſequens adieci.

LEMMA

Digitized by Google

LEMMA.

189. *Si corpus* PARSBQ *vrgeatur a quibuscunque potentiis, inuenire motum qui in corpore generatur.* Tab. XI. fig. 2.

Solution.

Ex ſuperioribus conſtat a potentiis quibuscunque in corpore duplicem generari motum progreſſiuum ſcilicet centri grauitatis, et gyratorium circa centrum grauitatis; quorum motuum prior definitur ſi totum corpus in centro grauitatis concipiatur concentratum, eique omnes potentiae in directionibus parallelis ponantur applicatae. Ad motum gyratorium vero determinandum ſint AB, CD, et EF tres illi axes per centrum grauitatis G ducti et inter ſe normales, circa quorum quemlibet immotum corpus ſeorſim libere gyrari queat. Sit nunc momentum inertiae corporis reſpectu axis CD $=$ P momentum reſpectu axis AB $=$ Q et momentum reſpectu axis EF $=$ R. Conſideretur iam vna quaecunque potentiarum ſollicitantium OZ, quae in puncto O ſit applicata, ſeu cuius directio per O tranſeat. Ex puncto hoc O in planum ADBC ducatur normalis OH, itemque in planum AEBF normalis OL atque in CEDF normalis OI, habebiturque iunctis LN, LM, MH, HK, KI et NI parallelepipedum rectangulum NGMLOHKI. Deinde potentia OZ in puncto O applicata reſoluatur in tres potentias, O*a*, O*b*, O*c*, quarum directiones ſint inter ſe normales et parallelae axibus CD, AB et EF. Conſtat iam potentiae O*a* momentum reſpectu axis AB fore O*a*. LM $=$ O*a*. GN; eiusdemque potentiae momentum reſpectu axis EF fore $=$ O*a*. LN $=$ O*a*. MG.

Simili

Simili modo potentiae Ob momentum reſpectu axis CD erit $= Ob.\, IK = Ob.\, GN$, et momentum reſpectu axis $EF = Ob.\, IN = Ob.\, GK$. Denique potentiae Oc momentum reſpectu axis CD erit $= Oc.\, HK = Oc.\, GM$ atque momentum reſpectu axis $AB = Oc.\, HM = Oc.\, GK$. corpus igitur circa vnumquemque axem duobus momentis vrgebitur quae inter ſe vel conſpirant vel contrariantur. Spectata igitur congruentia vel repugnantia momentotum reperietur potentiae propoſitae OZ momentum ad corpus circa axem CD conuertendum fore $= Ob.\, GN + Oc.\, GM$. Momentum vero reſpectu axis AB erit $= Oa.\, GN - Oc.\, GK$. Atque momentum reſpectu axis EF erit $= Oa.\, GM + Ob.\, GK$ Simili modo reliquae potentiae corpus ſollicitantes ſunt reſoluendae, earumque momenta in ſingulos axes quaerenda, quae prout iſtis momentis vel fauent vel repugnant, ſigno $+$ vel $-$ ipſis ſunt adiiciendae. Ponatur igitur p pro momento potentiarum reſpectu axis CD; q pro momento reſpectu axis AB et r pro momento reſpectu axis EF. His ergo inventis habebitur vis gyratoria circa axem $CD = \frac{p}{P}$; vis gyratoria reſpectu axis $AB = \frac{q}{Q}$; atque vis gyratoria reſpectu axis $EF = \frac{r}{R}$ quae vires cum coniunctim aeque agant, ac ſeorſim, verus motus gyratorius innoteſcet. Q. E. I.

Coroll. 1.

190. Si directio potentiae ſollicitantis OZ per centrum grauitatis corporis G tranſeat, atque punctum O in G capiatur euaneſcet parallelepipedum $GNLMHOIK$, atque propterea vires gyratoriae omnes in nihilum abibunt, vti quidem alias conſtat.

Co-

Coroll. 2.

191. Si directio potentiae ſollicitantis OZ parallela fuerit vni axium, tum corpus circa hunc axem non convertetur, ſed tantum circa duos reliquos.

Scholion.

192. Quia directio potentiae ſollicitantis eſt linea recta, in ea vbicunque libuerit punctum O, in quo reſolutio inſtituitur accipi poteſt: vnde dubium oriri poſſet, vtrum perpetuo eaedem vires gyratoriae circa ſingulos axes ſint proditurae, mutato puncto O, an vero ſecus. Sed qui rem attentius perpendet, facile intelliget, in quocunque loco rectae OZ punctum O accipiatur, eadem momenta reſpectu axium reperiri debere.

PROPOSITIO 17.

Problema.

193. *Corporis cuiuscunque aquae inſidentis et ex ſitu aequilibrii depulſi motum, quo ſe in ſitum aequilibrii reſtituet, determinare.* Tab. XI. fig. 2.

Solutio.

Sit PARSBQ corpus, cuius ex ſitu aequilibrii, quem in aqua tenet, depulſi reſtitutionem quaerimus; G eius centrum grauitatis, atque CD, AB et EF tres eius axes inter ſe normales, circa quorum quemuis immotum corpus libere rotari queat. Sit maſſa ſeu pondus huius corporis $=M$ atque momentum inertiae eius reſpectu axis $CD=P$; momentum reſpectu axis $AB=Q$ et momentum reſpectu axis $EF=R$. Ponamus iam corpus hoc

aquae ita inſidere, vt partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſit in O, atque OZ linea ad ſuperficiem aquae normalis, ſeu verticalis; ſit N pondus aquae partem ſubmerſam volumine aequantis; vrgebitur ergo hoc corpus a preſſione aquae ſurſum in directione O Z vi $= N$, ſimul vero deorſum vrgebitur proprio pondere M in directione GX per centrum grauitatis G. tranſeunte. Ab his ergo duabus viribus centrum grauitatis G ſurſum vel deorſum vrgebitur prout N vel maius vel minus fuerit quam M. id quod per ſe patet. Quemadmodum autem corpus interea circa centrum grauitatis G convertatur, ſequenti modo ex ſola vi OZ definietur; cum altera vis GX per centrum grauitatis ipſum G tranſeat. Ex O ducantur axibus ſingulis rectae parallelae OLa, bOI, OHe ſitque coſinus ang. $ZOa = a$; coſ. ang. $ZOb = b$ et coſ. ang. $ZOc = c$. His poſitis ſi potentia N in directione OZ trahens reſoluatur in tres potentias iuxta directiones Oa, Ob, et Oc trahentes, erit $Oa = Na$; $Ob = Nb$ et $Oc = Nc$. Ex iſtis cum lemmate praecedente comparatis inuenietur vis gyratoria circa axem $CD = \frac{N(b \cdot GN + c \cdot GM)}{P}$ agens in ſenſum AEBF. Circa axem AB vero erit vis gyratoria $= \frac{N(a \cdot GN - c \cdot GK)}{Q}$ agens in ſenſum ECFD. Vis denique gyratoria circa axem EF erit $= \frac{N(a \cdot GM + b \cdot GK)}{R}$ agens in ſenſum BCA. quae vires gyratoriae ſi ſimul conſiderentur, obtinebitur verus motus gyratorius circa centrum grauitatis. Q. E. I.

Coroll. 1.

194. Si ex centro grauitatis G in directionem potentiae ſollicitantis OZ demittatur perpendiculum GY ſine reſolu-

reſolutione potentiae OZ, momenta eius reſpectu cuiusque axis poterunt determinari.

Coroll. 2.

195. Si enim ſinus inclinationis áxis CD ad planum GYZ fuerit K erit momentum potentiae $OZ = N$ reſpectu axis $CD = N. GY. K$.

Coroll. 3.

196. Similiter ſi ſinus inclinationis axis AB ad planum GYZ fuerit *m*, erit momentum potentiae N reſpectu axis $AB = N. GY. m$.

Coroll. 4.

197. Atque ſi ſinus anguli inclinationis axis EF ad planum GYZ ponatur *n* erit momentum potentiae N reſpectu axis $EF = N. GY. n$.

Coroll. 5.

198. Hinc ergo facilius patet momenta eadem prodire, in quocunque loco rectae OZ punctum O capiatur, cum eius poſitio in his formulis in calculum non ingrediatur.

Scholion.

199. Ratio horum momentorum in corollariis aſſignatorum fluit quidem ex forma momentorum propoſitionis, ſed tamen facilius ex principiis ſtaticis reddi poteſt ſequenti modo. Sit corporis cuiusuis centrum grauitatis G, Tab. XII.
et axis per id tranſiens GC, cuius reſpectu momentum fig. 1.
cuiuscunque potentiae corpus ſollicitantis determinari oporteat.

teat. Vrgeatur ſcilicet corpus a potentia N in directione YZ, in quam ex centro grauitatis G cadat perpendiculum GY. Iam ex Z in planum GYC demittatur perpendiculum ZC, iunctaque CY, erit planum ZYC normale ad planum GYC, atque CY normalis in CY. Reſoluatur potentia YZ in binas laterales YC et alteram cuius directio eſt parallela ipſi ZC; habebitque haec poſterior potentia ſola, quae eſt $\frac{N \cdot ZC}{YZ}$ momentum reſpectu axis GC. Demiſſo igitur ex Y in GC perpendiculo YM, erit momentum potentiae reſpectu axis $GC = \frac{N \cdot ZC \cdot YM}{YZ} = \frac{N \cdot ZC \cdot GY \cdot YC}{YZ \cdot GC}$. Demiſſo nunc porro ex C in YZ perpendiculo CN, erit $YZ : CZ = YC : CN$, vnde prodit illud momentum $= N \cdot GY \cdot \frac{CN}{GC}$. Eſt vero CN perpendiculum ex C in planum GYZ demiſſum ob CY ad GY et ZY ad CY atque CN ad YZ normales. Quamobrem exprimet $\frac{CN}{GC}$ ſinum anguli, quem axis GC cum plano GZY conſtituit. Qui ſinus ſi dicatur k erit momentum $= N \cdot GY \cdot k$, vti in corollariis eſt aſſertum.

PROPOSITIO 18.

Problema.

Tab. XII. fig. 2. 200. *Si corpus aquae inſidens vtcunque fuerit ex ſitu aequilibrii deturbatum, definire axem per centrum grauitatis tranſeuntem, circa quem corpus gyrari incipiet.*

Solutio.

Sit corporis pars aquae immerſa MPNQXP, eiusque centrum magnitudinis O et pondus aquae volumine partem ſubmerſam aequantis $= N$. Sit PMQN ſectio aquae in plano horizontali ſita, et OZ recta verticalis, vr-

vrgebitur ergo corpus a preſſione aquae vi N in directione OZ ſurſum. Ponatur corporis centrum grauitatis in G, et ex G in OZ demittatur perpendiculum GY. Deinde per G ad planum GYZ ducatur normalis DC quae proin erit linea horizontalis. Circa hanc autem lineam horizontalem DC tanquam circa axem corpus in ſitum aequilibrii ſeſe reſtituens, conuerti incipiet Nam cum axis DC ad planum GYZ ſit normalis, potentia N nullum habebit momentum in alios axes huic axi DC normales. Tota ergo potentia vim ſuam impendet ad corpus circa axem DC conuertendum, eritque eius momentum $=$N. GY. Q. E. I.

Coroll. 1.

201. Si ergo axis DC ita fuerit comparatus, vt corporis circa eum rotantis vires centrifugae ſe mutuo deſtruant, tum corpus perget circa hunc axem immotum gyrari.

Coroll. 2.

202. Corpus ergo aquae inſidens ex ſitu aequilibrii deturbatum, in eum reſtituetur motu gyratorio circa axem quendam horizontalem: dum interea centrum grauitatis vel ſurſum vel deorſum tantum fertur.

Scholion.

203. Etiamſi autem corpus circa axem CD immotum libere gyrari poſſit, tamen inde non ſequitur, integram reſtitutionem fieri circa hunc axem. Nam inter hunc motum directio OZ mutari poteſt, vnde quoque variatio axis DC oritur. Sed ex his tamen ſatis motus reſtitutionis perſpicitur.

 CAPVT

Caput Tertium

DE STABILITATE, QVA CORPORA AQVAE INSIDENTIA IN SITV AEQVLIBRII PERSISTVNT.

PROPOSITIO 19.

Theorema.

204.

Stabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſeuerat, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus dato angulo infinite paruo ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum.

Demonſtratio.

Si corpus aquae innatans aliquantillum ex ſitu aequilibrii declinetur, tum vel reſtituetur, vel quieſcet, vel etiam magis a ſitu aequilibrii recedet, et quaſi prolabetur ſe in alium ſitum aequilibrii recipiendo. In caſu igitur, quo ex ſitu aequilibrii declinatum quieſcit, ſtabilitas eſt nulla, cum etiam corpus ſibi relictum non reſtituatur; caſu vero, quo magis recedit a ſitu aequilibrii, ſtabilitas non ſolum nulla ſed negatiua adeo eſt cenſenda. Stabilitas ergo iis tantum aequilibrii ſitibus eſt tribuenda, in quos corpus ſi aliquantillum declinetur, reſtituitur. Si autem corpus minimo tantum angulo e ſitu aequilibrii declinetur, reſtitu-

reſtitutio fiet circa axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem, prout in propoſitione 18 eſt monſtratum. Cauſa vero reſtitutionis eſt momentum preſſionis aquae circa illum axem, quod in eodem corpore ipſi angulo proportionale eſſe infra oſtendetur. Quo ergo in diverſis corporibus eodem angulo e ſitu aequilibrii declinatis maius fuerit momentum illud reſtitutionis, eo fortior erit vis reſtitutionis, eoque propterea maior vis perſeuerandi in ſitu aequilibrii, quam ſtabilitatem voco. Hanc obrem ſtabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſiſtit, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus angulo infinite paruo e ſitu aequilibrii declinetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

205. Cum igitur in eodem corpore momentum reſtitutionis angulo declinationis a ſitu aequilibrii ſit proportionalis, atque in diuerſis corporibus ſtabilitas per aequales angulos definiatur, erit in corpore quocunque ſtabilitas abſolute vt momentum reſtitutionis per angulum declinationis diuiſum.

Coroll. 2.

206. Quia in ſtabilitate determinanda axis quidam horizontalis conſideratur, circa quem minima inclinatio fieri concipitur, manifeſtum eſt pro eodem córpore eodemque aequilibrii ſitu infinitas inueniri ſtabilitatis aeſtimationes, pro infinitis axibus, quorum reſpectu ſtabilitas definitur.

Corol. 3.

Coroll. 3.

207. Quando ergo de ſtabilitate, qua datum corpus aquae inſidens in dato aequilibrii ſitu perſiſtit, ſermo eſt, axis ſimul erit indicandus ad quem ſtabilitas refertur; alioquin enim ſtabilitas determinatam quantitatem habere nequit.

Coroll. 4.

208. Si ergo corpus quodpiam aquae in ſitu aequilibrii inſidat, ſtabilitas reſpectu cuiusdam axis fixi horizontalis indicabit, quantum illud corpus inclinationi circa illum axem reſiſtat. Quo magis enim corpus aquae inſidens inclinationi circa quempiam axem reluctatur, eo maior cenſetur eius ſtabilitas reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 5.

209. Quo ergo maior reperietur valor ſtabilitatis reſpectu cuiusdam axis, eo magis corpus inclinationi circa hunc axem reſiſtet. Atque ſi ſtabilitatis valor prodeat $= 0$, tum corpus ne quidem reſtituetur, ſi parumper circa illum axem inclinetur. At ſi ſtabilitas fuerit negatiua, tum corpus vel minime circa axem inclinatum non ſolum non reſtituetur, ſed ſubuertetur, donec in ſitum aequilibrii firmum et ſtabilem perueniat.

Scholion 1.

210. Doctrina haec de ſtabilitate corporum aquae innatantium, qua in ſitu aequilibrii quem tenent, perſeuerant, maximi eſt momenti in conſtructione et oneratione nauium. Maxime enim in nauigatione requiri ſolet, vt naues in ſitu ſuo recto quam firmiſſime perſiſtant, at-

que

Digitized by Google

que viribus inclinantibus vehementiſſime reſiſtant. Hancobrem iſtam doctrinam eo accuratius in hoc capite euoluere conſtitui, quo poſtmodum ex ea vtiles regulae pro conſtruendis et onerandis nauibus elici queant. Cum igitur in primo capite omnes ſitus inueſtigauerimus, quibus corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtere poſſit; hic in ſtabilitatem inquiremus, qua in quouis aequilibrii ſitu reſpectu cuiusque axis perſeueret. Inueniemus ergo alios aequilibrii ſitus firmos et ſtabiles, quando ſcilicet ſtabilitas affirmatiuum obtinebit valorem, alios vero inſtabiles ac labiles, quando ſtabilitas prodit negatiua. Habebuntur etiam nonnunquam ſitus ambigui, in quos ſtabilitas euaneſcens competit; quos caſus omnes diligenter perpendere ad praecepta rei nauticae tradenda maxime conducet.

Scholion 2.

211. Quamuis ad ſtabilitatem dati aequibrii ſitus perfecte cognoſcendam requiratur, vt ſtabilitas reſpectu omnium axium horizontalium definiatur, tamen ſatis commode gradus ſtabilitatis intelligitur, ſi ſtabilitas tantum reſpectu duorum axium inueſtigetur, quorum alter ſtabilitatem maximam alter vero minimam praebeat; ex his enim licebit ſtabilitatem reſpectu cuiusuis alius axis facile aeſtimare, cum plerumque ſufficiat limites noſſe, inter quos ſtabilitas contineatur. Sic naues a viribus externis multo difficilius proram puppemue verſus inclinantur quam ad latera, earumque ſtabilitas proinde reſpectu axis ſecundum latitudinem ducti maxima eſt, ſtabilitas vero reſpectu axis nauim ſecundum longitudinem traiicientis, minima. Stabilitatis ſcilicet definitio ſimilis eſt momentorum tam virium

M quam

Digitized by Google

quam inertiae, quae abſolute aſſignari non poſſunt, ſed ſemper ad axem quempiam, circa quem inclinatio fieri concipitur, referri debent. Hoc igitur pacto iſta tractatio, quae fere infinita videatur, maxime contrahetur, vt facili negotio abſolui queat. Quo autem a caſibus ſimplicioribus inchoemus, primo non corpora ſed tantum ſuperficies planas conſiderabimus, quae aquae in ſitu verticali inſideant, atque circa axem horizontalem per centrum grauitatis ſuperficiei ad ipſius planum normaliter tranſeuntem mobiles exiſtant. In huius modi ſcilicet ſuperficiebus planis alias a ſitu aequilibrii declinationes non contemplabimur, niſi quibus ipſae ſuperficies maneant verticales.

PROPOSITIO 20.
Problema.

212. *Inuenire ſtabilitatem, qua ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens in ſitu aequilibrii perſeuerat.*

Solutio.

Tab. XIII. fig. 1. Sit A M F N B ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens ita vt recta horizontalis A B ſit ſectio aquae. Sit centrum grauitatis huius figurae in G, et pondus figurae $= M$. Ducatur per G recta verticalis E F, in quam cadat centrum magnitudinis O partis ſubmerſae A M F N B quia figura in hoc ſitu aequilibrium tenere ponitur; atque ob eandem rationem pars ſubmerſa AMFNB tanta erit, vt maſſae aqueae volumine ipſi aequalis pondus ſit $= M$. Inclinetur iam figura haec quam minime ex ſtatu aequilibrii, ita vt $a\,b$ fiat ſectio aquae, atque per G ipſis

ipſis A B et $a\,b$ ducantur parallelae M N et $m\,n$, quarum M N horizontalis erit in ſitu aequilibrii, $m\,n$ vero horizontalis in ſitu inclinato. Sitque angulus inclinationis $MGm = dw$. Cum igitur pars ſubmerſa perpetuo conſtans eſſe debeat, erit area $aMFNb =$ areae $AMFNB$: niſi enim aequalis eſſet, centrum grauitatis vel aſcenderet vel deſcenderet donec aequalitas fuerit comparata, quo motu ipſe reſtitutionis motus circa centrum grauitatis factus, quem hic ſolum ſpectamus non turbatur. Poſita ergo interſectione rectarum A B et ab in C, erit area $ACa =$ areae BCb. Ob angulum autem inclinationis dw infinite paruum erit area $ACa = \frac{AC^2 \cdot dw}{2}$ et area $BCb = \frac{BC^2 \cdot dw}{2}$ vnde prodit $AC = BC = \frac{AB}{2}$. Quo nunc vis reſtitutionis ex ſitu inclinato in ſitum aequilibrii inveniatur, quaerendum eſt centrum magnitudinis partis ſubmerſae $aMFNb$; quae cum ſit $= AMFNB + BCb - ACa$, ex harum partium centris grauitatis reperiri poterit verae partis ſubmerſae centrum magnitudinis, indeque preſſionum aquae momentum ad reſtitutionem aequilibrii. Reſtituetur vero in aequilibrium, dum recta M N in ſitum horizontalem $m\,n$ reducetur. Conſideremus igitur primo aream $AMFNB$ cuius centrum grauitatis eſt in O et vis ſurſum vrgens ab ea orta $= M$. Per O ducatur verticalis VO, quae eſt directio vis M figuram ſurſum vrgentis; momentum ergo huius vis ad reſtituendum eſt $= M.\,GV = M.\,GO.\,dw$ ob angulum $GOV = MGm = dw$. Porro conſideretur areola CBb, cuius area eſt $\frac{BC^2 \cdot dw}{2} = \frac{AB^2 \cdot dw}{8}$. Vis igitur hinc orta figuram ſurſum vrgens eſt $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}$; cuius directio tranſit per centrum grauitatis Q elementi

 BCb;

BCb; ex Q in Cb ducatur normalis ſeu verticalis Qq, erit $Cq = \frac{2}{3} Cb \frac{2}{3} CB = \frac{1}{3} AB$, momentum igitur huius vis ad reſtituendum eſt $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB} (qo + GV)$. Denique elementum A C$a$ pari modo dabit vim $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}$, eiusque directio, quae eſt verticalis tranſit per eius centrum grauitatis P. Ducta ergo verticali Pp, erit $pC = \frac{2}{3} aC = \frac{1}{3} AC$. Momentum ergo huius vis contrarium erit prioribus ideoque $= - \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB} (po - GV)$. Quia ergo hoc momentum a prioribus ſubtrahi debet ob $aMFNb = AMFNB + BCb - ACa$, erit momentum, quo preſſio aquae in totam partem ſubmerſam $aMFNb$ exerta aequilibrium reſtituit $= M. GO. dw + \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 AMFNB} (po + qo) = M. GO. dw + \frac{M \cdot AB^3 \cdot dw}{12 AMFNB}$ ob $po + qo = pq = \frac{2}{3} AB$. Cum igitur momentum, quo figura in ſitum aequilibrii reſtituitur ſit $= M dw (GO + \frac{AB^3}{12 AMFNB})$ erit per angulum dw diuidendo ſtabilitas, qua figura in ſitu aequilibrii AMFNB perſeuerat $= M (GO + \frac{AB^3}{12 AFB})$ deſignante AFB aream partis ſubmerſae. Q. E. I.

Coroll. 1.

213. Patet ergo quod ſupra aſſeruimus, vim reſtituentem in ſitum aequilibrii proportionalem eſſe angulo, quo corpus ex ſitu aequilibrii eſt declinatum, ſi quidem angulus fuerit quam minimus, ideoque ſi ſtabilitas abſolute requiratur, angulum dw, quo inclinatio indicatur, omitti oportere. Sic igitur expreſſio ſtabilitatis momentis virium erit homogenea, cum ſit productum ex vi ſeu potentia M in lineam quandam rectam $GO + \frac{AB^3}{12 AF}$

Scho-

Digitized by Google

Scholion 1.

214. In expreſſione ſtabilitatis denotat GO diſtantiam centri grauitatis figurae a centro magnitudinis partis ſubmerſae, quando figura in aequilibrio exiſtit. Cum igitur poſuerimus in figura hac centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadere, per ſe patet, ſi in alio caſu centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis cadat, tum interuallum GO negatiue accipi debere, ita vt in huius modi caſibus ſtabilitas proditura ſit $= M\left(\frac{AB^3}{12 \cdot AFB} - GO\right)$. Hic ſcilicet figuras ex materia vtcunque heterogenea conſtantes conſideramus, ita vt centrum grauitatis G tam ſupra quam infra centrum magnitudinis O incidere poſſit; ſin autem figura ex materia homogenea confecta ponatur, tum neceſſario centrum grauitatis ſupra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadere oportet. Huius modi igitur caſibus ſtabilitas ſemper ex hac poſteriore formula erit aeſtimanda, in qua GO negatiuo ſigno afficitur.

Coroll. 2.

215. Quoties ergo centrum grauitatis infra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadit, tum ſitus aequilibrii ſemper erit firmus et ſtabilis, quia expreſſio ſtabilitatis negatiua fieri nequit.

Coroll. 3.

216. Sin autem centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadit, tum ſitus aequilibrii non erit ſtabilis, niſi fuerit $\frac{AB^3}{12 \cdot AFB} > GO$. At ſi fuerit $\frac{AB^3}{12 \cdot AFB} < GO$, ſitus erit inſtabilis ſeu labilis, et figura vel minime ex

 ſitu

ſitu aequilibrii declinata prolabetur, aliumque ſitum aequilibrii quaeret.

Coroll. 4.

217. Maximam igitur ſitus aequilibrii habebit ſtabilitatem, ſi centrum grauitatis profundiſſime, centrum magnitudinis autem in loco maxime eleuato fuerit ſitum; atque praeterea ſi ſectio aquae ſeu recta A B fuerit maxima: manente ſcilicet eodem figurae pondere M, quo ipſo magnitudo partis ſubmerſae etiam inuariata manet.

Coroll. 5.

218. In corporibus ergo aquae innatantibus, quo profundius pondera collocentur, eo maiorem ea ſtabilitatem in ſitu aequilibrii acquirent. Magis vero etiam ſtabilitas augebitur, ſi alis adiungendis ſectio aquae amplior reddatur.

Scholion 2.

219. Quamuis haec propoſitio tantum ad ſuperficies planas aquae verticaliter inſidentes ſit accommodata, tamen ea latius patet, et corpora cylindrica in ſe complectitur. Si enim corpus cylindricum aquae ita innatet, vt eius axis longitudinalis horizontalem ſitum teneat, tum eius ſtabilitas reſpectu axis horizontalis eiusdem ex ſtabilitate cuiusque ſectionis transverſalis, quae eſt ſuperficies plana verticalis, cognoſcetur. His igitur caſibus A F B erit ſectionis mediae corporis cylindrici pars aquae ſubmerſa, G totius corporis centrum grauitatis, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae: M vero pondus totius corporis, et A F B vt ante cuiusque ſectionis pars aquae ſub-

ſubmerſa. Praeterea etiam ex eadem propoſitione pro corporibus alius figurae conſectaria deduci poſſent, ſed de iis in ſequentibus, cum omnis generis corpora ex inſtituto contemplabimur, fuſius tractabimus.

PROPOSITIO 21.
Problema.

220. *Si figura plana aquae in ſitu verticali inſidens ex ſitu aequilibrii aliquantillum declinetur, determinare motum, quo ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituet.* Tab. XIII. fig. 1.

Solutio.

Sit figura plana A F B aquae inſiſtens in aequilibrio, cum praeter rectam per centrum grauitatis G ad planum figurae normaliter ductam etiam recta M G N fuerit horizontalis. Sit pondus figurae $= M$ atque A B ſectio aquae et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae A F B. Inclinetur nunc aliquantillum figura ex ſitu aequilibrii vt recta $\underline{a}\,\underline{b}$ fiat ſectio aquae, et angulus A C a fiat $= dw$. His poſitis ex prop. praeced. momentum reſtituens figuram in aequilibrium, quo ſcilicet figura circa axem horizontalem per G ad planum ipſius normaliter ductum circumvertetur, obtinebitur, ſi ſtabilitas ante inuenta per angulum inclinationis dw multiplicetur, eritque propterea hoc momentum ad corporis reſtitutionem tendens $= M\, dw\, (GO + \frac{AB^3}{12.AFB}.)$ Quoties igitur haec expreſſio fuerit affirmatiua, figura in ſitum aequilibrii reſtituetur, atque reſtitutio fiet rotando circa centrum grauitatis G, dum interea ipſum centrum grauitatis G recta vel aſcendit vel deſcen-

deſcendit, prout conditio ea, qua ſemper aequalis pars aquae debet eſſe ſubmerſa, requirit. Cum ergo hoc momentum angulo percurrendo ſit proportionale, figura eodem modo in ſtatum aequilibrii perueniet, quo pendulum deſcendendo ad ſitum verticalem accedens. Hancobrem figura oſcillationes inſtar penduli perficiet, donec totus motus a reſiſtentia fuerit conſumtus. Iſte motus oſcillatorius ergo cognoſcetur, ſi longitudo penduli ſimplicis determinetur, quod ſuas oſcillationes aequalibus temporibus abſoluat. Ad hoc vero pendulum aſſignandum neceſſe eſt, vt momentum inertiae figurae reſpectu axis circa quem gyratur conſtet. Sit igitur S momentum inertiae figurae ſeu aggregatum omnium particularum per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe rotationis multiplicatarum, qui axis ad figuram normaliter per G tranſit. Hinc igitur erit vis gyratoria $= \frac{Mdw}{S}\left(GO + \frac{AB^3}{12.AFB}\right)$, ex qua prodibit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillationes iſochronas cum oſcillationibus figurae abſoluit $= \frac{12S.AFB}{12M.GO.AFB + M.AB^3}$. Prodit enim perpetuo longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſi angulus inclinationis per vim gyratoriam diuidatur, id quod facile ex principiis mechanicis colligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

221. Longitudo ergo penduli iſochroni aequatur momento inertiae figurae reſpectu axis gyrationis diuiſo per ſtabilitatem figurae reſpectu eiusdem axis, prout quidem ſtabilitatem exprimere conſtituimus.

Co-

Coroll. 2.

222. Manente igitur eadem figurae ſtabilitate in ſuo aequilibrii ſitu oſcillationes eo erunt celeriores, quo minus fuerit momentum inertiae figurae; maximo autem exiſtente hoc momento, oſcillationes tardiſſimae fient.

Coroll. 3.

223. Manente autem eodem figurae momento inertiae oſcillationes eo crebriores euenient, quo maior fuerit figurae ſtabilitas; minuta autem ſtabilitate, oſcillationes ſegniores perficientur.

Coroll. 4.

224. Ad motum oſcillatorium ergo definiendum praeter pondus et figuram et centrum grauitatis, quae ad ſtabilitatem cognoſcendam ſufficiunt, noſſe oportet momentum inertiae figurae reſpectu axis, circa quem oſcillationes fiunt.

Scholion.

225. Quo tam ſtabilitas quam motus oſcillatorius huiusmodi figurarum aquae innatantium clarius cognoſcatur, iuuabit caſus ſpeciales conſideraſſe, in quibus quantitates adhuc indeterminatas determinari et inter ſe comparari licebit. Determinatas igitur figuras contemplabimur, quae aquae inſidant, vbi quidem ſufficiet figuram partis ſubmerſae poſuiſſe, cum figura partis ſupra aquam eminentis in computum non ingrediatur: Ex figura vero partis ſubmerſae ſimul centrum eius magnitudinis datur. Conveniet au-

N tem

Digitized by Google

tem tantum figuras regulares, quae circa verticalem EF partes ſimiles et aequales habeant, inueſtigaſſe, ne ante opus ſit ſitum aequilibrii inuenire. Ponemus igitur centrum grauitatis huiusmodi figurarum in ipſa verticali EF, quae eſt diameter, ſitum, quo aequilibrium habeatur, ſi iſta diameter verticalem ſitum obtinuerit. Eiusmodi ergo propoſitiones aliquot hic ſubiungemus, antequam ad ipſa corpora examinanda progrediamur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

Tab. XIII. fig. 2. 226. *Si figurae aquae inſidentis pars ſubmerſa* AFB *fuerit triangulum iſoſceles; determinare ſtabilitatem huius ſitus, atque motum oſcillatorium, quem figura, ſi ex hoc ſitu aliquantillum declinetur, acquiret.*

Solutio.

Ex vertice F in baſin AB, quae ſectionem aquae repraeſentat, ducatur perpendicularis FC baſin AB biſariam ſecans in C. Ponatur $AC = BC = a$; et perpendiculum $FC = b$; erit pars ſubmerſa $AFB = ab$, eiusque centrum magnitudinis in O, vt ſit $CO = \frac{1}{3}b$. Sit porro G centrum grauitatis totius figurae, atque $CG = h$, erit $GO = CG - CO = h - \frac{1}{3}b$. Vocetur deinde maſſa ſeu pondus totius figurae $= M$, et momentum eius reſpectu axis normaliter ad planum AFB per G tranſeuntis $= S$. His igitur poſitis erit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M(h - \frac{1}{3}b + \frac{2a^2}{3b}) = \frac{M(2a^2 - b^2 + 3hb)}{3b}$. Penduli vero ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus huius figurae oſcillantis lon-

longitudo erit $= \frac{3bS}{M(2a^2 - b^2 + 3bb)}$, ſi quidem ſtabilitas affirmatiuum habuerit valorem. Q. E. I.

Coroll. 1.

227. Si ergo fuerit $2a^2 + 3bb > b^2$ ſeu $b > \frac{b^2 - 2a^2}{3b}$, ſitus iſte aequilibrii erit ſtabilis, eoque maior erit ſtabilitas, quo maior fuerit iſte exceſſus.

Coroll. 2.

228. Hic porro ſitus aequilibrii erit indifferens, ſi fuerit $2a^2 + 3bb = b^2$; ſin autem fuerit $2a^2 + 3bb < b^2$, tum ſitus erit labilis, cumque figura tenere non poterit, ſed vel tantillum ex eo deturbata prolabetur.

Exemplum.

229. Si integra figura fuerit triangulum iſoſceles MFN. conſtans ex materia vniformi, cuius ad aquam grauitas ſpecifica teneat rationem $p:q$. ponanturque $ML = LN = A$, et $FL = B$, tum $AC = BC = a$ et $FC = b$, erit $ab : AB = p : q$, atque ob $a : b = A : B$ erit $a = A\sqrt{\frac{q}{q}}$ et $b = B\sqrt{\frac{p}{q}}$. Deinde vero erit $LG = \frac{1}{3}B$, atque ob $LC = B - B\sqrt{\frac{p}{q}}$ habebitur $CG = b = B\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}B$. Manente autem maſſa ſeu pondere figurae $= M$, erit momentum $S = \frac{M(MN^2 + MF^2 + NF^2)}{36}$ (170.) $= \frac{M(3A^2 + B^2)}{18}$. His ſubſtitutis reperietur ſtabilitas trianguli iſoſcelis MFN aquae innatantis, ita vt baſis MN horizontaliter extra aquam emineat, $= \frac{M(2(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 2B^2)}{3B}$. Quae ſi fuerit

 affir-

affirmatiua, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{B(3A^2 + B^2)}{12(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 12B^2}$.

Coroll. 1.

230. Stabilis ergo erit iſte trianguli aquae inſidentis ſitus aequilibrii, ſi fuerit $(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} > B^2$ ſeu $\frac{p}{q} > \frac{B^4}{(A^2 + B^2)^2}$ hoc eſt $\frac{p}{q} > \frac{LF^4}{MF^4}$. Labilis vero erit ſi $\frac{p}{q} < \frac{LF^4}{MF^4}$.

Coroll. 2.

231. Si triangulum fuerit aequilaterum, erit $B = A\sqrt{3}$; atque ſtabilitas eius in hoc aequilibrii ſitu prodibit $= \frac{2AM(4\sqrt{\frac{p}{q}} - 3)}{3\sqrt{3}}$. Longitudo vero penduli iſochroni erit $= \frac{A\sqrt{3}}{8\sqrt{\frac{p}{q}} - 6}$.

Coroll. 3.

232. Hoc ergo caſu ſitus aequilibrii erit ſtabilis, ſi $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{3}{4}$, hoc eſt ſi $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Poſita ergo grauitate ſpecifica aquae $q = 1000$, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $p > 562\frac{1}{2}$: inſtabilis autem erit, ſi grauitas ſpecifica trianguli minor eſt quam $562\frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

233. Si angulus ad F fuerit rectus, vt ſit $B = A$, erit ſtabilitas $= \frac{2AM(2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1)}{3}$. Situs ergo aequilibrii erit ſtabilis, ſi, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$, trianguli

Digitized by Google

anguli grauitas ſpecifica maior fuerit quam 250. Sin autem trianguli grauitas minor ſit quam 250, ſitus aequilibrii erit inſtabilis. Longitudo vero penduli iſochroni illo caſu fiet $= \frac{A}{6\sqrt{\frac{p}{q}} - 3}$.

PROPOSITIO 23.

Problema.

234. *Si figura aquae inſidens fuerit triangulum iſoſceles* FMN *baſem* MN *ſub aqua in ſitu horizontali ſectioni aquae* AB *parallelo habens poſitam; ſeu potius, ſi pars ſubmerſa* AMNB *fuerit trapezium, in quo latera* AB *et* NM *ſunt inter ſe parallela, angulique ad* M *et* N *aequales: determinare ſtabilitatem qua iſte ſitus aequilibrii conſeruatur, motumque oſcillatorium, quem eiusmodi figura, ſi aliquantillum ex ſitu aequilibrii deturbetur acquiret.* Tab. XIIII. fig. 1.

Solutio.

Ducta recta verticali CL, quae tam ſectionem aquae AB, quam baſin MN biſecet, in hac poſitum erit centrum magnitudinis partis ſubmerſae O. Quare neceſſe eſt, vt in eandem rectam centrum grauitatis totius figurae incidat, quod ſit in G. Ponatur $AC = BC = a : ML = LN = c : CL = b$: et $CG = h$. Centrum magnitudinis vero partis ſubmerſae O ita ſecundum praecepta ſtatica reperietur vt ſit $CO = \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$; erit ergo $GO = h - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$. Denotet preterea M maſſam totius figurae, atque S eiusdem momentum inertiae reſpectu axis ad figuram normaliter per centrum grauitatis G tranſeuntis. Cum ergo pars immerſa AMNB ſit $= b(a+c)$, erit $\frac{AB^3}{12 AMNB} = \frac{2a^3}{3b(a+c)}$

 vnde

vnde prodit ſtabilitas figurae in iſto ſitu aequilibrii $= M \left(b - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)} + \frac{2a^3}{3b(a+c)}\right) = \frac{M(3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3)}{3b(a+c)}$. Longitudo denique penduli ſimplicis cum oſcillationibus figurae iſochroni erit $= \frac{3b(a+c)S}{M(3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

235. Huiusmodi ergo figurae, cuius pars aquae ſubmerſa eſt AMNB, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3 > 0$: hoc eſt ſi fuerit $b > \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}$. Atque eo maior erit ſtabilitas, quo maiorem habuerit valorem iſta expreſſio $3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3$ ſeu iſta $b - \frac{b^2(a+2c) + 2a^3}{3b(a+c)}$.

Coroll. 2.

236. Contra vero ſi fuerit $b < + \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}$ figurae ſitus iſte aequilibrii erit inſtabilis et ſubuerſioni obnoxius. Indifferens vero erit aequilibrii ſitus, ſi fuerit $b = \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}$ in quo nullam omnino habebit ſtabilitatem.

Coroll. 3.

237. Si fiat $c = a$, pars figurae ſubmerſa erit rectangulum; his igitur caſibus erit ſtabilitas, qua figura in hoc ſitu perſiſtit $= M\left(b - \frac{b}{3} + \frac{aa}{3b}\right)$.

Coroll. 4.

238. Si ponatur $c = 0$, pars ſubmerſa fiet triangulum iſosceles, qui eſt caſus in praecedente propoſitione tractatus; reperitur autem ſtabilitas omnino vt ante $M\left(b - \frac{b}{3} + \frac{2aa}{3b}\right)$.

Exemplum.

239. Sit tota figura aquae innatans triangulum iſoſceles ex materia vniformi conſtans, cuius grauitas ſpecifica

Digitized by Google

ſica ad aquam teneat rationem $p:q$. Ponatur ML$=$NL $=$A; et perpendiculum FL$=$B; erit ergo $c=$A; et FC$=$B$-b$. Quamobrem habebitur FL. ML : FC. AC $=q:q-p$ hoc eſt AB : $a(B-b)=q:q-p$ atque ob FC: AC$=$FL : ML; erit B$-b:a=$B : A ſeu $a=\frac{A(B-b)}{B}$; quo valore in illa analogia ſubſtituto erit $AB^2 : A(B-b)^2 = q:q-p$ ſeu $q(B-b)^2=(q-p)B^2$; vnde oritur $pB^2=q(2Bb-bb)$ ſiue $b=B-\frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. hincque $a=\frac{A\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Cum vero ſit FG$=\frac{2}{3}$B: erit CG $=b=\frac{2}{3}B-\frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Si nunc haec omnia ſubſtituantur in formula ſtabilitatem huius ſitus exprimente, reperietur ipſa ſtabilitas $=\frac{2M(q-p)}{3Bp}(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}}-B^2)$. Momentum autem inertiae huius figurae eſt vt ante $=\frac{M(3A^2+B^2)}{18}$. Quocirca ſi ſtabilitas fuerit affirmatiua, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $=\frac{Bp(3A^2+B^2)}{12(q-p)(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}}-12(q-p)B^2}$.

Coroll. 2.

240. Huius igitur trianguli hac ratione aquae inſidentis ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}}>B^2$; ſeu $\frac{q-p}{q}>\frac{B^4}{(A^2+B^2)^2}$ hoc eſt ſi $\frac{q}{q}<\frac{A^2(A^2+B^2)}{(A^2+B^2)^2}$. Inſtabilis autem erit ſitus iſte aequilibrii, ſi fuerit $\frac{p}{q}>\frac{A^2(A^2+2B^2)}{(A^2+B^2)^2}$

Coroll. 1.

231. Si haec conferantur cum probl. praeced. (230) apparebit idem triangulum duplicem aequilibrii ſitum habere poſſe ſtabilem, ſi fuerit $A^4+2A^2B^2>B^4$ ſeu $A^2>B^2(\sqrt{2}-1)$, hoc eſt ſi fuerit FM$>$FL$\sqrt[4]{2}$. Quod eue-

euenit, ſi fuerit angulus $MFL > 33°$ ſeu ang. $MFN > 66°$. Hoc vero accidente erunt ipſius $\frac{p}{q}$ limites iſti $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FL^4}{FM^4}$; inter quos ſemper continetur caſus quo $p:q = 1:2$; ſeu quo figura duplo leuior eſt quam aqua.

Coroll. 3.

242. Intelligitur porro fieri poſſe, vt neuter ſitus aequilibrii trianguli iſoſcelis, quo baſis eſt horizontalis, habeat ſtabilitatem; quod accidit ſi fuerit ang. $MFN > 66°$; atque $\frac{p}{q}$ inter hos limites $\frac{FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ contineatur, quorum ille eſt maior, hic vero minor. Inter hos autem limites continetur iterum ſemper caſus, quo $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

243. Abeat triangulum iſoſceles in aequilaterum; quo caſu fit $B = A\sqrt{3}$. Hanc obrem erit ſtabilitas trianguli aequilateri modo in figura expreſſo aquae inſidentis $= \frac{2AM(q-p)}{3p\sqrt{3}}(4\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 3)$.

Coroll. 5.

244. Huius ergo trianguli aequilateri tali ſitu aquae inſidentis ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $\sqrt{\frac{q-p}{q}} > \frac{3}{4}$ ſeu $\frac{q-p}{q} > \frac{9}{16}$, id quod accidit ſi fuerit $\frac{p}{q} < \frac{7}{16}$. Poſita igitur grauitate ſpecifica aquae $= 1000$; ſitus erit ſtabilis, ſi trianguli grauitas ſpecifica fuerit $< 437\frac{1}{2}$.

Coroll. 6.

245. Si angulus MFN fuerit rectus, ſeu $B = A$; erit ſtabilitas $= \frac{2AM(q-p)}{3p}(2\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 1)$, ſitus aequilibrii ergo

ſta-

ſtabilis erit, ſi fuerit $\frac{q-p}{q} > \frac{1}{4}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{3}{4}$. Hoc ergo accidit, ſi grauitas ſpecifica trianguli fuerit < 750, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$.

Scholion.

246. Quamuis hae propoſitiones figuras tantum planas ſcilicet triangula reſpiciant, tamen eae quoque, vti iam notaui, ad corpora accommodari poſſunt, quorum omnes ſectiones transuerſales ſunt triangula aequalia iſoſcelia; cuius modi ſunt priſmata triangularia. Ope variorum igitur huiusmodi priſmatum, quorum baſes ſunt triangula iſoſcelia varii generis veritas eorum, quae ex iſtis propoſitionibus deduximus, per experientiam comprobari poterit. In his ceterum propoſitionibus eos tantum triangulorum iſoſcelium aquae inſidentium ſitus examinauimus, in quibus baſes horizontalem obtinent ſitum, praetermiſſis reliquis aequilibrii ſitibus, cum ad calculos nimis prolixos euitandos, tum vero praecipue, quia de ſtabilitate horum reliquorum ſituum ex caſibus pertractatis ſatis tuto iudicare licet. In ſequentibus enim demonſtrabitur inter plures aequilibrii ſitus, quibus corpus quodque aquae innatare poteſt, alternos eſſe ſtabiles, alternos inſtabiles. Quare cum hic eorum caſuum praecipuorum, quibus triangula iſoſcelia aquae innatare poſſunt, ſtabilitatem determinauerimus, de reliquis caſibus facile iudicium ferri poterit. Si enim ſtatus quidam aequilibrii fuerit inſtabilis, ii ſitus, qui vtrinque proxime occurrent, certo erunt ſtabiles, niſi duo in vnam coaleſcant, quo caſu ſitus aequilibrii erit indifferens.

O PRO-

PROPOSITIO 24.
Problema.

247. *Si figurae aquae inſidentis pars ſubmerſa* AIHB
Tab. XIIII. fig. 2. *fuerit quadrilaterum rectangulum; determinare ſtabilitatem, qua figura in hoc aequilibrii ſitu perſeuerat; atque motum oſcillatorium, quo figura ex hoc ſitu parumper declinata nutabit.*

Solutio.

Ducatur verticalis C L parallelogrammum rectangulum AIHB biſariam ſecans, in cuius puncto medio O ſitum erit centrum magnitudinis partis ſubmerſae; in eandem igitur cadet centrum grauitatis totius figurae, quod ſit in G. Ponatur nunc $AC = BC = \frac{a}{2}$; ſeu $AB = a$ atque $AI = BH = CL = b$; et $CG = b$; erit $CO = \frac{1}{2}b$ atque $OG = b - \frac{1}{2}b$; maſſa denique totius figurae ſit $= M$. Stabilitas igitur, qua figura in hoc aequilibrii ſitu perſiſtit, quae generaliter eſt $= M\left(GO + \frac{AB^3}{12 \cdot AIHB}\right)$, erit pro hoc caſu $= M\left(b - \frac{1}{2}b + \frac{a^2}{12b}\right) = \frac{M(a^2 - 6bb + 12bb)}{12b}$. At ad oſcillationes definiendas, quas figura circa hunc aequilibrii ſitum abſoluet, ſit momentum inertiae figurae reſpectu puncti $G = S$, hincque reperietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{12Sb}{M(a^2 - 6bb + 12bb)}$, ex quo tempus, quo minimae vacillationes abſoluuntur, determinatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

248. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus conſeruetur, neceſſe eſt vt $a^2 - 6bb + 12bb$ ſit quantitas poſitiua, id quod

quod euenit ſi fuerit $b > \frac{6bb-aa}{12b}$. At ſi fuerit $b = \frac{6bb-aa}{12b}$ tum aequilibrii ſitus erit indifferens, labilis vero et ſubuerverſioni obnoxius erit, ſi fuerit $b < \frac{6bb-aa}{12b}$.

Coroll. 2.

249. Bacillus igitur admodum gracilis aquae in ſitu verticali inſidere poterit, ſi fuerit $b > \frac{b}{2}$ ob graſſitiem a fere euaneſcentem. Hoc ergo eueniet, ſi eius centrum grauitatis in inferiorem partis ſubmerſae medietatem ſeu infra punctum medium eius cadit.

Coroll. 3.

250. Niſi ergo inferior bacilli pars ſit notabiliter ponderoſior, quam pars ſuperior, bacillus in aqua ſitum verticalem tenere non poterit. Ex formula autem inuenta determinari licebit, quantum plumbi ſeu alius materiae aqua grauioris bacillo in inferiore parte ſit adiungendum, quo ſitus verticalis ſubſiſtat.

Exemplum.

251. Sit tota figura aquae inſidens parallelogrammum EIHF ex materia vniformi conſtans, cuius grauitas ſpecifica ad aquam teneat rationem $p:q$: ſitque eius longitudo $EF = IH = A$, et latitudo $EI = FH = B$; erit $a = A$; et $B : b = q : p$ vnde fit $b = \frac{Bp}{q} = CL$; at $KG = LG = \frac{1}{2}B$ hinc igitur prodibit $CG = CL - LG = \frac{Bp}{q} - \frac{1}{2}B = b$. His in formula ſtabilitatem exprimente ſubſtitutis reperietur $\frac{M(A^2q^2 - 6B^2pq + 6B^2p^2)}{12Bpq}$, qua expreſſione ſtabilitas huius aequilibrii ſitus definitur. Momentum inertiae vero

huius figurae reſpectu eius centri grauitatis G eſt $= \frac{M(A^2+B^2)}{12}$ ex quo obtinebitur longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Bpq(A^2+B^2)}{A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2}$, vnde oſcillationes huius aequilibrii ſitus, ſi quidem fuerit ſtabilis, cognoſcentur.

Coroll. 1.

252. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis requiritur vt ſit $A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2 > 0$ ſeu $A > \frac{B}{q}\sqrt{(6pq-6pp)}$. Data ergo materiae, ex qua rectangulum conſtat grauitate ſpecifica, hinc ratio laterum A et B innoteſcit, qua fit vt rectangulum latere B verticali, et latere A horizontali aquae innatare queat.

Coroll. 2.

253. Ex his ſimul intelligitur idem hoc rectangulum aquae innatare poſſe latere A exiſtente verticali, B vero horizontali, ſi fuerit $B > \frac{A}{q}\sqrt{(6pq-6pp)}$.

Coroll. 3

254. Horum duorum igitur aequilibrii ſituum vterque poterit eſſe ſtabilis, ſi tam $\frac{A}{B}$ quam $\frac{B}{A}$ maius fuerit quam $\frac{\sqrt{(6pq-6pp)}}{q}$. Hoc autem accidere nequit, niſi ſit $q > \sqrt{(6pq-6pp)}$ ſeu $qq > 6pq-6pp$. Id quod accidit duplici modo, primo ſcilicet ſi fuerit $\frac{q}{p} > 3+\sqrt{3}$, ſecundo ſi fuerit $\frac{q}{p} < 3-\sqrt{3}$.

Coroll. 4.

255. Quo ergo parallelogrammum rectangulum vtroque ſitu aquae firmiter innatare poſſit, materiae ex qua

Digitized by Google

qua conſtat grauitas ſpecifica vel maior eſſe debebit quam 788. $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$ poſita aquae grauitate 1000. Horum caſuum vtroque latera parallelogrammi ita inter ſe adornari poſſunt, vt vterque aequilibrii ſitus fiat ſtabilis.

Coroll. 5.

256. Si igitur materiae, ex qua rectangulum conficitur, grauitas ſpecifica contineatur inter hos limites 788 $\frac{2}{3}$ et 211 $\frac{1}{3}$, tum nullum rectangulum confici poteſt, quod vtroque ſitu aquae firmiter inſidere queat.

Coroll. 6.

257. At ſi data fuerint rectanguli latera A et B requiritur ad hoc vt rectangulum, latere A exiſtente horizontali et B verticali, aquae firmiter inſidere queat, vt ſit vel $\frac{q}{p} > \frac{3B^2 + B\sqrt{(9B^2 - 6A^2)}}{A^2}$ vel $\frac{q}{p} < \frac{3B^2 - B\sqrt{(9B^2 - 6A^2)}}{A^2}$, ſiue neceſſe eſt vt ſit vel $p < \frac{q(3B - \sqrt{(9B^2 - 6A^2)})}{6B}$ vel $p > \frac{q(3B + \sqrt{(9B^2 - 6A^2)})}{6B}$.

Coroll. 7.

258. Si ergo rectangulum abeat in quadratum, fiatque $B = A$, tum ſitus aequilibrii, quo alterum latus horizontale alterum verticale exiſtit, erit ſtabilis, ſi fuerit vel $p < \frac{q(3 - \sqrt{3})}{6}$ vel $p > \frac{q(3 + \sqrt{3})}{6}$ hoc eſt, ſi denotante 1000, grauitatem aquae, grauitas ſpecifica quadrati vel maior fuerit quam 788 $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$.

Scholion.

259. Quae in hac propoſitione ſunt determinata, etiamſi ad figuras tantum planas pertinere videantur, ta-

men ad omnis generis parallelepipeda rectangula pertinent; ex iis enim, quouis parallelepipedo propoſito, diiudicare licet, quanta ſtabilitate ſuper quaque hedra aquae innatare poſſit. Deinde vltimum exempli corollarium ad cuborum natatum ſuper aqua inueſtigandum eſt apprime accommodatum, ſi quidem cubi vel ex materia homogenea ſint confecti, vel ſaltem centrum grauitatis in ſui medio habeant ſitum. Intelligitur autem eiusmodi cubos aquae in ſitu erecto, quo binae hedrae ſunt horizontales, reliquae verticales, innatare non poſſe, niſi eorum grauitas ſpecifica vel maior fuerit quam $788\frac{2}{3}$ vel minor quam $211\frac{1}{3}$, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$. Quoties ergo cubi grauitas ſpecifica inter hos limites continetur, maior ſcilicet eſt quam $211\frac{1}{3}$ minor tamen quam $788\frac{2}{3}$, tum talis cubus ſitu erecto aquae neutiquam inſidere poterit, ſed ſitum induet alium, quo vel planum diagonale, vel ipſa diagonalis ſitum horizontalem vel verticalem occupabit. Quanta vero in iſtius modi ſitibus ſitura ſit ſtabilitas, ex ſequente propoſitione colligere licebit, in qua quidem tantum quadratum aquae ita inſidens, vt altera diagonalis horizontalem, altera verticalem ſitum habeat, examini ſum ſubiecturus.

PROPOSITIO 25.
Problema.

Tab. XIIII. fig. 3 et 4.

260. *Quadrati* EIHF *quod aquae ita inſidit, vt eius diagonalis* EH *ſitum verticalem obtineat, ſtabilitatem definire, qua in hoc ſitu perſeuerat, atque motum oſcillatorium circa hunc aequilibrii ſitum.*

Solu-

Solutio.

Duplex hic caſus eſt euoluendus, prout vel maior vel minor pars quam dimidia aquae immergitur, quorum illud accidit, ſi fuerit $p > \frac{1}{2}q$ hoc vero ſi $p < \frac{1}{2}q$, denotante $p:q$ rationem quam tenet pondus quadrati ad pondus aequalis voluminis aquae. Sit autem latus quadrati $= A$; et poſito quadrati centro grauitatis in G ſit HG $= b$. His praemiſſis in genere conſideremus primo caſum quo eſt $p < \frac{1}{2}q$, atque pars ſubmerſa ſit triangulum AHB, ſectione aquae exiſtente AB. Erit ergo AC. CH ſeu $AC^2 : A^2 = p:q$ ideoque $AC = CH = A\sqrt{\frac{p}{q}}$, centrum grauitatis partis ſubmerſae vero cadet in O, vt ſit $HO = \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{p}}$. Quamobrem erit $GO = -b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}}$. Hinc igitur prodibit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M(-b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}}) = M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)$. Denique poſito momento inertiae quadrati reſpectu centri grauitatis $G = S$, erit longitudo penduli ſimplicis $= \dfrac{S}{M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)}$, quod oſcillationes iſochronas vacillationibus quadrati abſoluet. Q. E. Alterum. fig. 3.

Sit nunc $p > \frac{1}{2}q$, quo caſu maior pars AIHFB quam dimidia aquae immergitur exiſtente AB ſectione aquae. Erit ergo $A^2 - AC^2 : A^2 = p:q$, et diuidendo $AC^2 : A^2 = p - p : q$ vnde ſit $AC = CE = A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$ atque $CH = A\sqrt{2} - A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$. Ex his inuenitur centrum magnitudinis partis ſubmerſae in O ita vt ſit $HO = A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\frac{A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{p\sqrt{q}}$ hincque erit $GO = -b + A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}}$ ipſa vero pars ſubmerſa erit $= \frac{A^2p}{q}$. Quocirca ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit fig. 4.

$= M$

$=M(-b+A\sqrt{2}-\frac{Aq}{p\sqrt{2}}+\frac{4A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}})$ per quam ſi diuidatur momentum figurae reſpectu centri grauitatis G, quod ſit S, prodibit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillationes circa hunc aequilibrii ſitum indicabit. Q. E. Alterum.

Coroll. 1.

261. Si centrum grauitatis quadrati cadat in eius punctum medium, quo caſu fit $b=\frac{A}{\sqrt{2}}$; erit caſu priore quo $p<\frac{1}{2}q$ ſtabilitas $=AM(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}-\frac{1}{\sqrt{2}})$: poſteriore vero caſu, quo $p>\frac{1}{2}q$ ſtabilitas erit $=AM\frac{(q-p)}{p}(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{q-p}{q}}-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Coroll. 2.

fig. 3. 262. Quadratum ergo ex materia vniformi conſtans, quod plusquam duplo leuius eſt quam aqua, in ſitu diagonalis verticali aquae firmiter inſidebit, ſi fuerit $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoc eſt ſi fuerit $\frac{p}{q}>\frac{9}{32}$. Poſita ergo aquae grauitate ſpecifica 1000, ſtabilitatem habebit iſte aequilibrii ſitus, ſi fuerit quadrati grauitas ſpecifica minor quam 500, maior vero quam $281\frac{1}{4}$.

Coroll. 3.

fig. 4. 263. Quadratum vero ex materia plus quam duplo graviore quam aqua conſtans in ſitu diagonalis verticali firmiter aquae innatabit, ſi fuerit $\frac{q-p}{q}>\frac{9}{32}$ ſeu $\frac{p}{q}<\frac{23}{32}$ Hoc ergo accidit, ſi eius grauitas ſpecifica fuerit maior quam 500, minor vero quam $718\frac{3}{4}$.

Coroll. 4.

264. Ante autem iuuenimus quadratum aquae ita innatare non poſſe, vt bina latera teneant horizontalem, bina

bina vero verticalem ſitum, ſi eius grauitas ſpecifica contineatur intra limites $211\frac{1}{3}$ et $788\frac{2}{3}$. Quamobrem eiusmodi quadrata, quorum grauitas ſpecifica continetur vel intra hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$ vel intra hos $788\frac{2}{3}$ et $718\frac{3}{4}$, neque ſitu erecto neque diagonali verticaliter poſita aquae innatare poſſunt.

Scholion.

265. Hinc diiudicari poſſunt natationes prismatum ex materia homogenea confectorum, quorum baſes ſunt quadrata, in aqua ſi quidem axes ſitum teneant horizontalem ſiue baſes verticaliter ſint poſitae. Triplici enim modo eiusmodi prismata aquae inſidebunt, pro varia grauitatis ſpecificae ratione. Primo ſcilicet hedrae binae horizontalem, binae vero verticalem ſitum tenebunt, ſi prismatis grauitas ſpecifica vel minor fuerit quam $211\frac{1}{3}$ vel maior quam $788\frac{2}{3}$. Secundo duorum planorum diagonalium alterum verticaliter alterum vero horizontaliter erit poſitum, ſi prismatis grauitas ſpecifica contineatur inter limites $281\frac{1}{4}$ et $718\frac{3}{4}$ Neutro denique horum modo, ſed ſitu ad vtrumque obliquo prisma aquae innatabit, ſi eius grauitas ſpecifica contineatur vel inter hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$, vel inter hos $718\frac{3}{4}$ et $788\frac{2}{3}$. Si quis hoc experimentis comprobare voluerit, prismata ſatis longa adhiberi oportet, quo eorum axes ſemper horizontaliter aquae incumbant: breuiora enim huiusmodi prismata ad iſtud negotium minus ſunt idonea, cum ea pluribus quam tribus dictis modis aquae innatare queant, eo quod alii etiam axes inter natandum ſitum horizontalem conſtanter ſeruare poſſint, quae varietas in longioribur locum non habet.

P PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO 26.
Problema.

Tab. XV. fig. 1.

266. *Determinare ſtabilitatem, qua figura quaecunque curuilinea AFB circa axem FC vtrinque partes ſimiles et aequales habens in ſitu aequilibrii aquae inſidet.*

Solutio.

Sit AFB pars aquae immerſa et AB ſectio aquae, erit FC linea verticalis et ſimul diameter orthogonalis figurae, ita vt ſit AC = BC. Denotet M totius figurae maſſam, eiusque centrum grauitatis ſit in G, exiſtente FG = b. Ponatur porro FC = x et AC = BC = y, ita vt aequatio inter x et y naturam curuae propoſitae exprimat. Sit iam O areae AFB aquae ſubmerſae centrum magnitudinis, erit FO $= \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, ideoque GO $= \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx} - b$. Quia vero tota area aquae immerſa eſt $= 2\int y\,dx$, reperietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus $= M\left(\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx} - b + \frac{y^3}{3\int y\,dx}\right)$, quae expreſſio in hanc commodiorem ſaepius poteſt transmutari $M\left(\frac{\int y(x\,dx + y\,dy)}{\int y\,dx} - b\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

267. Quoties ergo $\frac{\int y(x\,dx + y\,dy)}{\int y\,dx}$ maius eſt quam b, toties iſte aequilibrii ſitus erit ſtabilis, eoque ſtabilior, quo maior fuerit exceſſus, $\frac{\int y(x\,dx + y\,dy)}{\int y\,dx} - b$.

Coroll. 2.

268. At ſi fuerit $\frac{\int y(x\,dx + y\,dy)}{\int y\,dx}$ vel aequale vel etiam minus quam b, tum illo caſu aequilibrii ſitus erit indifferens, hoc vero adeo inſtabilis vt minimum declinatus ſubuertatur.

Exem-

Exemplum 1.

269. Sit figura aquae immerſa AFB ſegmentum circuli cuius radius ſit $=a$, erit $y=\sqrt{(2ax-xx)}$ et $y^2+x^2=2ax$, vnde fit $ydy+xdx=adx$. Hoc ergo caſu habebitur $\int ydx=\int dx\sqrt{(2ax-xx)}$; et $\int y(xdx+ydy)=\int adx\sqrt{(2ax-xx)}$. Quocirca ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit $=M(a-b)$ quae ideo erit conſtans ſiue maius ſiue minus ſegmentum circuli aquae immergatur.

Coroll. 1.

270. Dummodo ergo figurae centrum grauitatis infra centrum circuli cadat, aequilibrium firmiter conſeruabitur, idque eo magis, quo profundius ſitum erit centrum grauitatis.

Coroll. 2.

271. ſin autem centrum grauitatis in centrum circuli incidat, tum ſitus aequilibrii erit indifferens, quod euenit in cylindris homogeneis aquae horizontaliter incumbentibus.

Exemplum 2.

272. Sit figura aquae immerſa AFB ſectio conica quaecunque verticem in F et axem FC habens; erit $y=\sqrt{(2ax-nxx)}$ ſcilicet ſi n fuerit numerus affirmatiuus, curua erit ellipſis, ſin negatiuus hyperbola, at ſi $n=0$ tum curua abibit in parabolam. Erit ergo $y^2+x^2=2ax-(n-1)xx$, et $ydy+xdx=adx-(n-1)xdx$. Hinc igitur obtinebitur ſtabilitas, qua iſte aequilibrii ſitus gaudet $=M(\frac{\int dx(a-(n-1)x)\sqrt{(2ax-nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax-nxx)}}-b)=M(a-b-\frac{(n-1)\int xdx\sqrt{(2ax-nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax-nxx)}})$. Caſu autem quo $n=0$ atque curua in parabolam abit, erit ſtabilitas $=M(a-b+\frac{1}{3}x)$.

Coroll. 1.

273 Si puncta A, F et B tanquam fixa conſiderentur, atque ſtabilitates, quas variae ſectiones conicae per ea tranſeuntes inter ſe comparentur, ponatur $CF = c$ et $AC = f$. ob $x = c$ et $y = \sqrt{(2ax - nxx)} = f$; erit $a = \frac{f^2 + nc^2}{2c}$.

Coroll. 2.

274. Caſu ergo quo curua eſt circulus ſtabilitas erit $= M(\frac{ff + cc}{2c} - b)$. Caſu autem quo curua eſt parabola, erit ſtabilitas $= M(\frac{ff + \frac{5}{3}cc}{2c} - b)$. Maiorem ergo habet ſtabilitatem parabola quam circulus per eadem tria puncta tranſiens.

Coroll. 3.

275. Eſt autem generaliter ſatis prope $\frac{(n-1)\int xdx\sqrt{(2ax - nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax - nxx)}} = \frac{3(n-1)x}{5}$. Quamobrem ſtabilitas erit $= M(a - b - \frac{3(n-1)x}{5}) = M(\frac{ff + \frac{(5-n)}{5}cc}{2c} - b)$. Stabilitas ergo eo erit maior, quo minor fuerit $\underline{n}$.

Coroll. 4.

276 At $\underline{n}$ non vltra datum limitem diminui poteſt, quia $\underline{a}$ affirmatiuum habere debet valorem, eſtque $a = \frac{ff + ncc}{2c}$ ergo ad ſummum fieri poteſt $n = \frac{-ff}{cc}$ quo caſu ſectio conica abit in triangulum iſoſceles AFB, quod ergo hunc aequilibrii ſitum firmius conſeruabit, quam vlla alia ſectio conica per eadem puncta A, F, B tranſiens, atque centrum grauitatis in eodem puncto G habens.

Scholion

Digitized by Google

Scholion.

276. Abunde haec ſufficere poſſunt ad ſtabilitatem, quae in quolibet aequilibrii ſitu ineſt, cognoſcendam, ſi quidem corpus aequae innatans vel eſt figura plana tenuiſſima, vel inſtar talis conſiderari poteſt. Antequam autem ad ſtabilitatem corporum indagandam progrediar, proprietatem inſignem quam plures eiusdem corporis aequilibrii ſitus ratione ſtabilitatis inter ſe tenent, proferam et demonſtrabo.

PROPOSITIO 27.

Theorema.

277. *Si omnes ſitus, quibus figura data quaecunque in aqua aequilibrium tenere poteſt, conſiderentur, tum iſti aequilibrii ſitus alternatim erunt ſtabiles, et inſtabiles.*

Demonſtratio.

Pro quouis aequilibrii ſitu concipiatur per figurae centrum grauitatis ducta recta parallela ſectioni aquae at que per hanc ipſam rectam per centrum grauitatis ductam innoteſcet aequilibrii ſitus: manente enim iſta recta horizontali parallela, figura aquae eousque immergatur, donec pars debita ſub aqua exiſtat, quo facto habebitur ſitus aequilibrii. Ita in figura propoſita A C *a c* deſignent rectae A *a*, B *b*, C *c*, D *d* per centrum grauitatis G ductae omnes aequilibrii ſitus, qui in hac figura dantur, dentur ſcilicet quatuor aequilibrii ſitus, in quibus ſectiones aquae reſpectiue ſint parallelae rectis A *a*, B *b*, C *c*, D *d*; quibus poſitis dico, ſi ſitus aequilibrii A *a* fuerit ſtabilis, tum Tab. XV. fig. 2.

 quo-

quoque ſitum ab hoc computando tertium C*c* fore ſtabilem ſecundum vero B*b* et quartum D*d* fore inſtabiles. In hoc demonſtrando ita verſabor vt oſtendam inter duos ſitus ſtabiles neceſſario vnum ſitum inſtabilem contineri debere, pariter ac inter duos ſitus inſtabiles vnum ſtabilem, hoc enim probato veritas theorematis erit euicta. Sint igitur A*a* et C*c* duo aequilibrii ſitus ſtabiles inter ſe proximi, ſeu tales inter quos non detur alius ſitus ſtabilis. Si nunc figura ex ſitu A*a* verſus ſitum C*c* convertendo declinetur, tum primo quidem niſum habebit ſeſe in ſitum A*a* reſtituendi, at ſi propius ad ſitum C*c* peruenietur, tum figura niſum habebit ſeſe in ſitum aequilibrii C*c* recipiendi. Quamobrem neceſſe eſt vt inter duos hos ſitus ſtabiles A*a* et C*c* vna exiſtat poſitio puta B*b*, quam ſi figura tenet aequaliter ad vtrumque ſitum A*a* et C*c* propendeat, in hoc igitur ſitu dabitur aequilibrium, id vero inſtabile, quia figura tantillum ex eo declinata vel ad aequilibrii ſitum A*a* vel ad C*c* nititur; ex quo manifeſtum eſt, inter duos ſitus aequilibrii ſtabibiles neceſſario vnum aequilibrii ſitum inſtabilem contineri debere. Simili modo ſi ſint B*b* et D*d* duo aequilibrii ſitus inſtabiles, ſe immediate inſequentes, vterque ea praeditus erit proprietate, vt figura ſi ex vno ſitu verſus alterum declinetur, tum niſum habitura ſit recedendi ab illo aequilibrii ſitu; quamobrem neceſſario dabitur inter iſtos duos aequilibrii ſitus inſtabiles B*b* et D*d*, talis ſitus vti C*c*, in quo figura vtrumque illum aequilibrii ſitum aquae auerſabitur; in hoc igitur ſitu figura aequilibrium tenebit, idque ſtabile quia figura vtrinque ex eo declinata niſu gaudet ſeſe in illum reſtituendi. Cum igitur tam inter duos

duos ſitus ſtabiles vnus inſtabilis, quam inter duos inſtabiles vnus ſitus ſtabilis exiſtat, ſitus auquilibrii omnes tum ſtabiles tum inſtabiles ſe mutuo alternatim excipient. Q. E. D.

Coroll. 1.

278. In vnaquaque ergo figura aquae inſidente tot dabuntur aequilibrii ſitus ſtabiles, quot inſtabiles, et hanc obrem omnium aequilibrii ſituum numerus erit par.

Coroll. 2.

279. Nulla igitur figura pauciores duobus aequilibrii ſitus habere poteſt. Omnis enim figura vnum neceſſario habet ſitum ſtabilem et propterea vnum quoque inſtabilem.

Coroll. 3.

280. Definitis ergo pro quapiam figura omnibus ſitibus, quibus in aqua aequilibrium tenet, ſi de vnico conſtet, vtrum ſtabilis ſit an inſtabilis, ſimul de omnibus reliquis idem conſtabit.

Coroll. 4.

281. Interim tamen fieri poteſt, vt numerus aequilibrii ſituum in quapiam figura actu deprehendatur impar, id quod eueniet ſi duo aequilibrii ſitus proximi ſtabilis et inſtabilis in vnum confundantur, quo ſitus oritur, indifferens. Situs aequilibrii igitur indifferens ſpectari debet tanquam coniunctio duorum aequilibrii ſituum proximorum, ideoque pro duobus eſt numerandus.

Scho-

Digitized by Google

corporis tranſeuntibus, circa quos corpus inclinando ex ſitu aequilibrii depelli poteſt.

Coroll. 3.

286. Fieri igitur poteſt vt idem aequilibrii ſitus reſpectu vnius pluriumue axium horizontalium ſit ſatis ſtabilis, qui tamen reſpectu reliquorum axium eſt inſtabilis. Semper autem in vnoquoque corpore oportet dari vnum aequilibrii ſitum, qui reſpectu omnium axium ſit ſtabilis; alioquin enim corpus ſuper aqua quiescere non poſſet.

Coroll. 4.

287. Si autem corporis cuiuſpiam aquae inſidentis aequilibrii ſitus fuerit ſtabilis reſpectu duorum axium horizontalium inter ſe normalium, tum iſte aequilibrii ſitus reſpectu omnium reliquorum axium erit ſtabilis. Inclinatio enim circa axes intermedios reſolui poteſt in inclinationes binas circa illos axes inter ſe normales, quae ambae cum praeditae ſint vi reſtituente, neceſſe eſt, vt iſte aequilibrii ſitus reſpectu omnium axium ſit ſtabilis.

Coroll. 5.

288. Ad corporis igitur aquae in aequilibrio inſidentis ſtabilitatem cognoscendam, ſufficiet reſpectu duorum axium inuicem normalium ſtabilitatem inueſtigaſſe; cum inde ſtabilitas reſpectu cuiusvis alius axis pendeat, atque ſatis tuto aeſtimari queat.

Scholion.

289. Quamdiu figuras tantum planas aquae verticaliter innatantes ſumus contemplati, vnico modo ſtabilitatem

tatem cuiusque aequilibrii ſitus determinauimus, atque id etiam ſufficiebat, quia eiusmodi figuras circa vnicum axem horizontalem, normalem ſcilicet ad planum figurae, mobiles poſuimus; quilibet autem facile intelliget, huiusmodi figuras, quantumuis eae magnam habere inuentae ſunt ſtabilitatem, tamen ſubuerſioni ad latera maxime eſſe obnoxias. Simili modo perſpicuum eſt, naues inclinationi verſus proram puppimue multo fortius reſiſtere quam inclinationi ad latera, illoque proinde caſu maiorem habere ſtabilitatem quam iſto. Quamobrem cum nunc nobis ſit propoſitum in ſtabilitatem, qua corpora quaecunque aquae inſidentia gaudent, inquirere, omnes inclinationes, quibus corpora ex ſitu aequilibrii declinari poſſunt, conſiderari oportet, atque definiri quanta vi cuique inclinationi reſiſtant. Infinitis autem modis corpus ex ſitu aequilibrii declinari poteſt, pro infinitis axibus horizontalibus per centrum grauitatis tranſeuntibus, circa quos corpus mobile exiſtit. Hanc ob rationem quando de ſtabilitate, qua corpus quodpiam in aqua ſitum aequilibrii tenet, eſt quaeſtio, id abſolute definiri nequit, ſed determinanda eſt certa inclinatio, in qua ſtabilitas ſeſe exerat; quem in finem iſtam ſtabilitatis determinatam definitionem praemiſi, in qua ſtabilitatem ad certum quendam axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem alligaui. Quamuis autem hoc pacto ſumme difficile videatur de ſtabilitate corporum aquae innatantium certi quid ſtatuere, cum infiniti axes deberent conſiderari, et reſpectu cuiusque ſtabilitas aſſignari, tamen iam notaui eiusmodi inſuperabili labore non eſſe opus, ſed ſufficere, ſi reſpectu duorum tantum axium inuicem normalium ſtabilitas definiatur. Motus

eum

enim inclinatorius circa quemuis alium axem ſpectari poteſt tanquam compoſitus ex duobus motibus inclinatoriis circa illos axes inuicem normales, pro quorum vtroque ſi ſtabilitas fuerit cognita, inde ſtabilitas reſpectu alius cuiusque axis poterit colligi. Quemadmodum igitur pro quouis aequilibrii ſitu in corpore quocunque aquae innatante ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis horizontalis debeat inveſtigari, in ſequente propoſitione docebitur.

PROPOSITIO 28.

Problema.

290. *Corporis* ACFDB *aquae in aequilibrio inſidentis determinare ſtabilitatem reſpectu axis dati horizontalis* cd *per centrum grauitatis corporis* G *tranſeuntis, atque motum oſcillatorium cuius corpus circa hunc axem eſt capax.* Tab. XV. fig. 3.

Solutio.

Sit ACBD ſectio aquae, et AFB pars corporis aquae immerſa, cuius centrum magnitudinis O ſitum erit in recta verticali EF per centrum grauitatis corporis G tranſeunte, eo quod corpus in aequilibrio eſt poſitum. Sit totius corporis maſſa ſeu pondus $= M$, eiusque partis ſubmerſae ſoliditas ſeu volumen $= V$, atque momentum inertiae totius corporis reſpectu axis $\underline{c}\ \underline{d} = S$. Concipiatur nunc corpus paulisper inclinari circa axem $\underline{c}\ \underline{d}$ centro grauitatis interea vel aſcendente vel deſcendente, quo aequalis pars aquae maneat immerſa. Fiat vero inclinatio per angulum infinite paruum $d\underline{w}$, poſito ſinu toto $= 1$; atque poſt hanc inclinationem ſit $aCbD$ ſectio aquae

 prio-

priorem aquae ſectionem ſecans recta CD, parallela axi $\underline{cd}$, eritque angulus, quem haec noua ſectio aquae cum priore conſtituit pariter $= dw$. Quia autem vtroque caſu aequale corporis volumen ſub aqua verſatur, erit ſegmentum ACD*a* aequale ſegmento BCD*b*. Ponatur areae ACD centrum grauitatis in *p*, areae autem BCD centrum grauitatis in *q*, atque ex *p* et *q* in CD ducantur perpendiculares *pr* et *qs*, erit ſoliditas ſegmenti ACD*a* $=$ ACD. *pr*. *dw*, ſegmenti vero BCD*b* ſoliditas erit $=$ BCD. *qs*. *dw*; hinc igitur habebitur ACD. *pr* $=$ BCD. *qs*. Praeterea ipſius ſegmenti ACD*a* centrum magnitudinis cadat in P, ſegmenti vero BCD*b* in Q, atque ex P et Q in CD ducantur normales PR et QS.

Iam per punctum O ducatur ad planum *a*C*b*D perpendicularis *e*O*g*, quae in ſitu corporis inclinato erit verticalis, atque tum ex G in hanc rectam, tum ex *e* per E in CD ducantur normales G*g* et *e*EH, erit G*g* $=$ GO.*dw* et E*e* $=$ EO.*dw*. Quo igitur vim inueniamus qua corpus ex ſitu hoc inclinato in priſtinum ſitum aequilibrii reſtituitur, pars corporis aquae immerſa eſt conſideranda quae eſt $=$ ACFDB $+$ ACD*a* $-$ BCD*b*, ex quibus ſingulis membris vires ſunt definiendae ad corpus reſtituendum, vel conuertendum circa axem $\underline{cd}$. Preſſionis autem aquae, quam pars ACFDB ſuſtinet, momentum ad corpus reſtituendum eſt $=$ M. G*g* $=$ M. GO. *dw*. Nunc fiat vt V ad ACD*a* ita pondus M ad vim ex ſegmento ACD*a* ortam, quae proinde erit $= \frac{M \cdot ACDa}{V} = \frac{M \cdot ACD \cdot pr \cdot dw}{V}$, quae expreſſio pariter valebit pro preſſione aquae in ſegmentum BCD*b*. Cum autem ſegmenti ACD*a* centrum

trum magnitudinis ſit in P, erit momentum inde oriundum ad corpus reſtituendum $= \frac{M.ACD\cdot pr\cdot dw}{V}(PR + He + Gg)$; momentum vero ortum ex vi ſegmenti BCD*b* tendet ad ſubuerſionem, eritque adeo negatiuum et $= \frac{-M\cdot ACD\ pr.dw}{V}$ $(QS - He - Gg)$. Horum trium momentorum duo priora ſunt addendi et a ſumma poſtremum ſubtrahendum, quo facto prodibit momentum totale ad reſtitutionem corporis in priſtinum aequilibrii ſitum tendens $= M\,dw(GO + \frac{ACD.pr}{V}(PR + QS))$; quod diuiſum per angulum inclinationis dw dabit ſtabilitatem huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $cd = M(GO + \frac{ACD\cdot pr(PR+QS)}{V})$. Diuidatur per hanc ſtabilitatis expreſſionem momentum materiae ſeu inertiae totius corporis reſpectu axis cd, quod eſt S, et prodibit longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus corporis ſeſe circa axem cd in aequilibrium reſtituentis quae penduli longitudo proinde erit $= \frac{SV}{M(G.O+ACD\cdot pr(PR+QS))}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

291. Quia eſt ACD. $pr =$ BCD. qs atque p et q ſint centra grauitatis arearum ACD et BCD, ſequitur rectam CD tranſire per centrum grauitatis ſectionis aquae ACBD.

Coroll. 2.

292. Si ergo ſectionis aquae ACBD centrum grauitatis repertum fuerit in I, atque ſtabilitas huius aequilibrii ſitus requiratur reſpectu axis cd, tum in ſectione aquae ACBD per centrum grauitatis I ducatur recta parallela CD ipſi axi cd, qua inuenta ſtabilitas deſiderata per calculum innoteſcet.

Coroll. 3.

293. Quemadmodum autem p et q ſunt centra grauitatis partium ACD et BCD ſectionis aquae, ita intelligere licet puncta P et Q eſſe centra oſcillationis earundem partium circa axem CD oſcillantium.

Coroll. 4.

294. Poſtquam igitur ſectio aquae recta per centrum grauitatis tranſeunte diuiſa eſt in duas partes, vtriusque partis tam centrum grauitatis quam centrum oſcillationis debet indagari, quo facto ſine vllo ad angulum inclinationis dw habito reſpectu ſtabilitas deſiderata poterit inueniri.

Coroll. 5.

295. Quoniam inter oſcillandum centrum grauitatis totius corporis G recta vel aſcendit vel deſcendit, vt perpetuo debita corporis pars maneat aquae ſubmerſa; perſpicuum eſt huiusmodi motum centri grauitatis fore minimum, ſi recta verticalis per centrum grauitatis totius corporis tranſiens ſimul per centrum grauitatis ſectionis aquae transeat.

Coroll. 6.

296. Intelligitur ceterum quo maior ſit expreſſio $M(GO + \frac{ACD \cdot pr(PR + QS)}{V})$, eo firmius corpus in ſuo aequilibrii ſitu eſſe permanſurum, ſi ſcilicet circa axem cd ad inclinandum ſollicitetur; ſin autem haec expreſſio fiat negatiua, tum corpus minime declinatum iri ſubuerſum.

Sholion

Digitized by Google

Scholion.

297. Determinata igitur eſt ſatis commode et concinne ſtabilitas, qua vnumquodque corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtit, id quod primo intuitu ſummopere difficile videri potuiſſet. Praeterea etiam ea regula eſt perquam ſimplex et facilis, cuius ope ipſae oſcillationes, quas corpus ex ſitu aequilibrii depulſum ſeſe reſtituens abſoluit, quo ipſo dignitas et vtilitas huius theoriae abunde intelligitur; facile enim erit hinc inſignia commoda ad nauigationem deriuare, quod fieri non potuiſſet, ſi enodatio harum propoſitionum ad inextricabiles calculos deducta fuiſſet. Quae autem ad ſtabilitatem determinandam pro quoque corpore noſſe oportet, ſunt praeter pondus totius corporis a quo quantitas partis ſubmerſae pendet, interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae atque imprimis ſectio aquae quae ad hoc negotium calculo eſt ſubiicienda. Sectiones igitur aquae variarum figurarum conueniet conſiderari, atque eas expreſſiones, quas ad ſtabilitatem definiendam noſſe oportet, definiri quo poſt modum facilius ſit de quoque corpore aquae innatante iudicium ferre. Hunc in finem in ſequente propoſitione inuentam expreſſionem calculo analytico ſum perſecuturus.

PROPOSITIO 29.

Problema.

Tab. XVI. fig. 1.

298. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque* ACBD, *cuius natura per aequationem eſt data, definire ſtabilitatem corporis aquae inſidentis reſpectu axis cuiusuis, per calculum analyticum.*

Solutio

Solutio.

Sit M. maſſa ſeu pondus corporis aquae inſidentis, et V volumen partis ſubmerſae, atque Go exprimat interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, poſito centro grauitatis G in loco humiliore; poſito enim centro grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O tum loco $+$GO ſcribi debet $-$GO. Iam per centrum grauitatis ſectionis aquae ducta ſit recta CD parallela illi axi, cuius reſpectu ſtabilitas quaeritur; et ad hanc rectam tanquam axem referantur orthogonaliter ordinatae YXZ, ponaturque GX$=x$; XY$=y$; et XZ$=z$. Sint porro p et q centra grauitatis arearum CAD et CBD, atque P et Q earundem centra oſcillationis reſpectu axis CD; et ex his punctis ad axem CD ducantur normales pr, qs, PR et QS. His poſitis erit $pr = \frac{\int yydx}{2\int ydx}$; $qs = \frac{\int zzdx}{2\int zdx}$; atque PR$= \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx}$ et QS$= \frac{2\int z^3dx}{3\int zzdx}$ integralibus his ita acceptis vt euaneſcant poſito $x = 0$; atque tum loco x poſito CD. Ita exprimet $\int ydx$ aream CAD, atque $\int zdx$ aream CBD. Quia vero eſt CAD.pr=CBD. qr, erit $\int yydx = \int zzdx$. ob ACD $pr = \frac{1}{2}\int yydx$ et CBD.$qr = \frac{1}{2}\int zzdx$. Denique autem habebitur PR$+$QS$= \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx} + \frac{2\int z^3dx}{3\int z^2dx} = \frac{2\int(y^3+z^3)dx}{3\int y^2dx}$; quibus in formula ſupra inuenta ſubſtitutis reperietur ſtabilitas corporis in iſto aequilibrii ſitu $= M\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$.

Coroll. 1.

299. Ad ſtabilitatem igitur obtinendam ope calculi integralis ſumendum eſt integrale formulae $\int(y^3+z^3)dx$, ita

ta vt euaneſcat poſitis $x = 0$, atque poſt integrationem peractam, poni debet $x = CD$.

Coroll. 2.

300. Si recta CD ſectionem aquae in duas partes ſimiles et aequales diuidat, erit vbique $z = y$ hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= M(GO + \frac{2\int y^3 dx}{3V})$.

Coroll. 3.

301. Si centrum grauitatis totius corporis G ſupra centrum magnitudinis O partis ſubmerſae cadat, tum interuallum GO negatiue accipi oportet, eritque his caſibus ſtabilitas $= M(\frac{\int (y^3 + z^3) dx}{3V} - GO)$.

Coroll. 4.

302. Niſi ergo G ſupra O cadat, aequilibrii ſitus reſpectu omnium axium erit ſtabilis; quia $\int (y^3 + z^3) dx$ ſemper affirmatiuum tenet valorem. At exiſtente puncto G magis eleuato quam O, tum fieri poteſt, vt ſitus aequilibrii ſit inſtabilis, id quod accidit ſi fuerit $GO > \frac{\int (y^3 + z^3) dx}{3V}$.

Scholion.

303. Quo autem has formulas eo facilius ad varia corporum aquae innatantium genera accommodare liceat, figuras nonnullas determinatas loco ſectionis aquae ACBD ſubſtituam, et quomodo ſe habeat ſtabilitas eiusmodi corporum aquae inſidentium inueſtigabo. Non ſolum autem ſtabilitatem reſpectu vnici axis determinabo, ſed reſpectu binorum inter ſe normalium, quo ex hac duplici ſtabili-

 tate

tate reſpectu cuiusuis alius axis ſtabilitas poſſit aeſtimari. In hunc finem eiusmodi elegi figuras, quae vel in nauigatione locum habeant, vel etiam ad experimenta inſtituenda ſint maxime accomodatae, vt tam vſus quam vtilitas huius theoriae clariſſime ob oculos ponatur. Huic igitur negotio abſoluendo ſequentes deſtinaui propoſitiones, quibus inſtitutum huius capitis penitus exhaurietur.

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tab. XVI. fig. 2. 304. *Si corporis aquae inſidentis ſectio aquae fuerit parallelogrammum rectangulum* EFHK, *inuenire eius ſtabilitatem tum reſpectu axis* CD, *tum axis ad hunc normalis* AB.

Solutio.

Conſideretur primo axis CD parallelus lateribus EF et KH, ſitque $EF = KH = A$; $EK = B$, et maſſa ſeu pondus corporis $= M$, volumenque partis ſubmerſae $= V$. Ponatur $CX = x$ erit $XY = XZ = y = z = \frac{1}{2} B$. Ergo $\int y^3 dx = \frac{B^3 x}{8}$ et $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{B^3 x}{4} = \frac{A \cdot B^3}{4}$ ſumto integrali per totum axem CD. Erit igitur ſtabilitas reſpectu axis $CD = M\left(GO + \frac{A \cdot B^3}{12 V}\right)$. Simili autem modo ſtabilitas reſpectu alterius axis AB erit $= M\left(GO + \frac{A^3 \cdot B}{12 V}\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

305. Si ergo tam $GO + \frac{A B^3}{12 V}$ quam $GO + \frac{A^3 . B}{12 V}$ fuerint quantitates affirmatiuae, tum ſitus aequilibrii corporis erit ſtabilis reſpectu cuiusuis axis alius.

Coroll.

Coroll. 2.

306. Stabilitas igitur reſpectu axis CD eo erit maior, quo maius fuerit latus EK=B; atque ſemper ſtabilitas erit maxima reſpectu axis breuioris, quod quidem per ſe eſt planum.

Scholion.

307. Si pari modo per integrationem computetur ſtabilitas reſpectu diagonalis alterutrius EH vel FK tum reperietur $\int(y^2+z^2)\,dx = \frac{A^3 \cdot B^3}{3(A^2+B^2)}$. Atque ipſa ſtabilitas corporis reſpectu huius axis erit $= M \cdot (GO + \frac{A^3 \cdot B^3}{6V(A^2+B^2)})$. Quae expreſſio media eſt inter expreſſiones ante inuentas pro axibus CD et AB. Atque ſi fuerit A=B tum ſtabilitas erit aequalis tam reſpectu axium AB et CD quam reſpectu diagonalium. Ex quo facilius intelligitur, ad ſtatum corporum aquae innatantium cognoſcendum ſufficere ſtabilitatem reſpectu duorum axium inter ſe normalium determinaſſe. Eiusmodi autem bini axes ſunt accipiendi, qui in ſectione aquae ſunt praecipui, et quorum alter maximam alter vero minimam habeat ſtabilitatem, quemadmodum in caſu propoſito fecimus.

Exemplum 1.

308. Si totum corpus fuerit parallelepipedum MPQ NRTVS aquae ita inſidens, vt EKHF ſit ſectio aquae; atque pondus eius ſe habeat ad aequalis voluminis aquei pondus vt p ad q. Deinde ſit longitudo MN=a; latitudo MP=b; et altitudo PT=c; erit in ſectione aquae A=a et B=b. Habebitur autem ex ſtatu aequilibrii $q:p$=PT(c):KT, vnde eſt KT=$\frac{pc}{q}$; atque volumen Tab. XVI. fig. 3.

Digitized by Google

partis ſubmerſae $= \frac{pabc}{q} = V$; cuius centrum magnitudinis O cadet in medio inter I et L rectae verticalis WL per medium parallelepipedi ductae, ita vt ſit $LO = \frac{pc}{2q}$. Quoniam vero hic ſitus aequilibrio praeditus ponitur, neceſſe eſt, vt centrum grauitatis totius corporis cadat in eandem rectam verticalem LW; ſit ergo in G, exiſtente $LG = b$, erit $GO = \frac{pc}{2q} - b$. His igitur ſubſtitutis erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis CD, qua inclinationi circa hunc axem reſiſtitur $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qb^2}{12pc}\right)$ ſtabilitas vero reſpectu axis latitudinalis AB erit $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qa^2}{12pc}\right)$ in quibus expreſſionibus littera M denotat pondus parallelepipedi, atque p ad q rationem grauitatis ſpecificae corporis ad aquam. Ex his igitur formulis ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu cuiusuis axis colligi poterit.

Coroll. 1.

309. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, oportet eſſe tam $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ quam $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{12pc}$. Si ergo ſit $a > b$, dum modo fuerit $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ ſitus aequilibrii reſpectu omnium axium erit ſtabilis.

Coroll. 2.

310. Si parallelepipedum conſtet ex materia vniformi, tum eius centrum grauitatis G cadet in medio inter L et W, eritque $b = \frac{c}{2}$. Hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= M\left(\frac{qb^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$ reſpectu axis CD. Reſpectu vero alterius axis AB erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right.$.

Coroll.

Coroll. 3.

311. Sit baſis parallelepipedi quadratum ſeu $a = b$; erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt ſit $c < \frac{qa}{\sqrt{6p(q-p)}}$.

Exemplum 2.

Tab. XVI. fig. 4.

312. Sit corpus aquae innatans cuneiforme MRPQSN aquae in ſitu erecto inſidens vt ſectio aquae EKHF ſit rectangulum baſi MPQN parallelum. Pondus autem huius corporis ſe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Ponatur $MN = PQ = a$; $MP = NQ = b$; atque altitudo cunei WL ſit $= c$; in qua recta verticali WL ambo centra tam grauitatis G quam magnitudinis O ſint ſita, atque $LG = b$. Iam manentibus $EF = KH = A$; $EK = FH = B$ erit $A : B = a : b$ atque $A : A = WL\,(c) : IL$; vnde fiet $IL = \frac{Ac}{a}$. At ex grauitate ſpecifica ſequitur $q : p = b^2 : B^2$, vnde prodit $B = b\sqrt{\frac{p}{q}}$; atque $A = a\sqrt{\frac{p}{q}}$ et $IL = c\sqrt{\frac{p}{q}}$. Ex his reperietur $LO = \frac{2}{3}LI = \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}$, atque $GO = \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - b$. Volumen denique partis ſubmerſae V erit $= \frac{ABc}{2}\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{abcp\sqrt{p}}{2q\sqrt{q}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget ſtabilitas reſpectu axis $CD = M\left(\frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - b + \frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. Atque reſpectu alterius axis AB erit ſtabilitas $= M\left(\frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - b + \frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

313. Si cuneus iſte ex materia vniformi eſt confectus, erit $b = \frac{2}{3}c$; atque hoc caſu ſtabilitas reſpectu axis

CD erit $= M\left(\frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$; reſpectu axis AB vero erit ſtabilitas $M\left(\frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

314. Si ergo fuerit $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{a^2+4cc}$, atque etiam $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{bb+4cc}$, tum ſitus iſte aequilibrii erit ſtabilis; caſibus vero contariis ſitus prodibit inſtabilis et ad ſubuerſionem procliuis

Coroll. 3.

315. Si generaliter b retineat valorem eundem, vtraque expreſſio $\frac{a^2}{6c} + \frac{2}{3}c$ et $\frac{bb}{6c} + \frac{2}{3}c$ fit infinite magna tam ſi $c = 0$ quam ſi $c = \infty$ minimum igitur valorem induet, ſi fuerit $a = 2c$ vel etiam $b = 2c$. His igitur caſibus ſtabilitas prodibit minima ceteris paribus.

Exemplum 3.

Tab. XVI. fig. 5.

316. Sit corpus aquae inſidens pyramis recta MN LPQ cuius baſis MNPQ ſit horizontalis et parallelogrammum rectangulum, cui ergo ſectio aquae EFHK erit parallela pariterque parallelogrammum rectangulum. Sit MN $=$ PQ $= a$; MP $=$ NQ $= b$, et altitudo WL $= c$; et centrum grauitatis extet in G, vt ſit LG $= b$. Pondus autem huius pyramidis ſit M, quod, ſe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Iam erit $a : b = A : B$, atque $a^3 : A^3 = q : p$; ita vt ſit $A = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $B = b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, ſimiliterque LI $= c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Centrum magnitudinis autem partis ſubmerſae cadet in O vt ſit LO $= \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, vnde erit GO $= \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b$. At volumen partis ſubmerſae erit

$=$

$= \frac{ABc}{3}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{pabc}{3q}$. His ſubſtitutis erit ſtabilitas reſpectu axis CD $= M$ $(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$. At reſpectu axis A B ſtabilitas erit $= M(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$.

Coroll. 1.

317. Manentibus igitur tam b quam ratione $p:q$ iisdem, ſtabilitas reſpectu axis CD erit minima, ſi fuerit $b = c\sqrt{3}$. Reſpectu axis AB vero ſtabilitas erit minima, ſi fuerit $a = c\sqrt{3}$.

Coroll. 2.

318. Quo igitur huiusmodi pyramis firmiſſime ſitu erecto aquae innatet, in ea conficienda imprimis eſt euitandum ne ſit vel a vel b prope aequale ipſi $c\sqrt{3}$.

Coroll. 3.

319. Si iſta pyramis ex materia vniformi conſtet tum erit $b = \frac{3}{4}c$. Stabilitas ergo talis pyramidis reſpectu axis CD erit $= M(\frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$, at reſpectu axis AB erit ſtabilitas $= M(\frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$.

Coroll. 4.

320. Quo igitur eiusmodi pyramis aquae firmiter inſideat neceſſe eſt vt ſit tam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{bb+3cc}$ quam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{a^2+3cc}$. Si ergo fuerit $a < b$, oportet vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{27c^6}{(a^2+3c^2)^3}$.

Coroll. 5.

321. Si fuerit $a = b = c$; talis pyramis ſitum in figura repreſentatum conſeruare non poterit niſi ſit $\frac{p}{q} > \frac{27}{64}$.

$\frac{27}{64}$; hoc eſt, niſi pyramidis grauitas ſpecifica ſit maior quam $421\frac{7}{8}$, poſita aquae grauitate ſpecifica $=1000$.

PROPOSITIO 31.
Problema.

Tab. XVII. fig. 1.

322. *Si corporis natantis ſectio aquae fuerit rhombus* ACBD, *determinare eius ſtabilitatem reſpectu vtriusque diagonalis* CD *et* AB.

Solutio.

Conſideretur primo axis per centrum grauitatis corporis tranſiens parallelus diagonali CD; ducaturque ordinata quaecunque YXZ; atque vocatis $CI=DI=A$; $AI=BI=B$; $CX=x$; $XY=XZ=y$, erit $A:B=x:y$ et $y=\frac{Bx}{A}=z$; atque latus rhombi AC erit $=\sqrt{(A^2+B^2)}$. His poſitis erit $\int y^3\,dx=\frac{B^3x^4}{4A^3}$; poſitoque $x=A$ habebitur valor huius expreſſionis pro parte CIA $=\frac{1}{4}A.B^3$ qui quater ſumtus reſpondebit toti rhombo CBDA, pro quo proinde erit $\int(y^3+z^3)\,dx=A.B^3$. Si nunc corporis pondus ponatur $=M$; et interuallum centri magnitudinis ſuper centro grauitatis $=GO$ atque volumen partis ſubmerſae $=V$, erit ſtabilitas reſpectu axis CD $=M(GO+\frac{A.B^3}{3V})$. Simili autem modo reperietur ſtabilitas reſpectu axis AB $=M(GO+\frac{A^3.B}{3V})$. Ex quibus duabus expreſſionibus ſtabilitas reſpectu cuiusuis alius axis poterit colligi. Q. E. I.

Coroll. 1.

323. Si igitur diagonales ſint inaequales, corpus inclinationi circa longiorem minus reſiſtit, quam circa breviorem

viorem; quae regula fere in omnibus ſectionibus aquae locum habet, vbi axes inter ſe normales ſunt inaequales.

Coroll. 2.

324. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt tam $GO + \frac{A \cdot B^3}{3V}$ quam $GO + \frac{A^3 \cdot B}{3V}$ habeat valorem affirmatiuum, id quod accidit, ſi tantum minor expreſſio fuerit affirmatiua.

Coroll. 3.

325. Si latus rhombi AC ponatur $= C$, atque angulorum ſinus $= m$; anguli ACB coſinus vero $= n$; erit anguli CAB coſinus $= -n$. Hinc reperitur $B = C\sqrt{\frac{1-n}{2}}$; et $A = \frac{mC}{\sqrt{2(1-n)}}$. Quare ſtabilitas reſpectu axis CD erit $= M(GO + \frac{m(1-n)C^4}{12V})$ reſpectu axis AB autem $= M(GO + \frac{m(1+n)C^4}{12V})$.

Coroll. 4.

326. Si rhombus abit in quadratum, fiet $m = 1$ et $n = 0$; hocque caſu ſtabilitas reſpectu vtriusque diagonalis erit eadem ſcilicet $= M(GO + \frac{C^4}{12V}$; quae ipſa expreſſio quoque inuenta eſt ex praecedente propoſitione, facta applicatione parallelogrammi ad quadratum.

Exemplum.

327. Terminetur pars corporis aquae ſubmerſa in recta horizontali RS parallela diagonali CD, atque rectis BL, AL ad punctum medium L rectae RS ductis, Tab. XVII. fig. 2.

S item-

Digitized by Google

itemque verticalibus CR et DS, ita vt ſingulae ſectiones horizontales ſint rhombi. Maneant $CI = DI = A$; $AI = BI = B$; ſitque $CR = LI = DS = D$; erit partis ſubmerſae volumen $V = ABD$; eiusque centrum magnitudinis in O vt ſit $LO = \frac{2}{3}D$. Totius vero corporis centrum grauitatis cadat in G, dicaturque $LG = b$; erit $GO = \frac{2}{3}D - b$. Ex his igitur reperietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $CD = M(\frac{2}{3}D - b + \frac{B^2}{3D})$. At reſpectu axis AB erit ſtabilitas $= M(\frac{2}{3}D - b + \frac{A^2}{3D})$.

Coroll. 1.

328. Quo igitur iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis neceſſe eſt vt ſit $b < \frac{A^2 + 2D^2}{3D}$, ſimulque etiam $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$. Si ergo fuerit $B < A$ ſufficiet ad ſtabilitatem corpori comparandam eſſe $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$.

Coroll. 2.

329. Niſi ergo ſit $B > D$, neceſſario centrum grauitatis corporis infra ſuperficiem aquae cadere debet, ſi quidem ſitus aequilibrii debeat eſſe ſtabilis.

PROPOSITIO 32.
Problema.

Tab. XVII. fig. 3.

330. *Si ſectio aquae fuerit triangulum iſoſceles* ECF, *determinare ſtabilitatem corporis aquae inſidentis tum reſpectu axis* CD *tum reſpectu axis* AB *ad illum normalis et per centrum grauitatis* I *ſectionis aquae tranſeuntis.*

So-

Solutio.

Poſitis pondere corporis $= M$; volumine partis ſubmerſae $= V$; et diſtantia inter centra grauitatis corporis et magnitudinis partis ſubmerſae $= GO$; ſit $CD = A$, et $DE = DF = B$; erit $CX\,(x) : XY\,(y) = A : B$, vnde ſit $y = \frac{Bx}{A}$. Quamobrem habebitur $\int y^3\,dx = \frac{B^3x^4}{4A^3} = \frac{A.B^3}{4}$, poſito $x = CD = A$. Pro tota ergo ſectione aquae erit $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{A \cdot B^3}{2}$, vnde fiet ſtabilitas reſpectu axis $CD = M\,(GO + \frac{A \cdot B^3}{6V})$. Conſideretur nunc axis AB, in quo eſt $AI = BI = \frac{2}{3}B$; et $CI = \frac{2}{3}A$; eritque $\int y^3 dx$, ortum ex area $ACB = \frac{AI \cdot CI^3}{4} = \frac{4A^3 \cdot B}{81}$; ergo eadem formula ex toto triangulo ACB orta erit $= \frac{8A^3 \cdot B}{81}$. Nunc ex altera parte conſideretur area tota IDFH, quae eſt rectangulum, exiſtente $IH = DF = B$, et $DI = FH = \frac{1}{3}A$; prodibitque ex ea $\int y^3\,dx = DI^3 . IH = \frac{A^3 \cdot B}{27}$. A quo valore ſubtrahi debet is qui oritur ex triangulo BFH qui eſt $= \frac{BH.FH^3}{4} = \frac{A^3.B}{4 \cdot 81}$, et relinquetur valor ipſius $\int y^3\,dx$ pro trapezio $IDBF = \frac{11 A^3 B}{4 \cdot 81}$. Trapezio ergo ABFE reſpondebit valor ipſius $\int y^3\,dx = \frac{11\,A^3 \cdot B}{2 \cdot 81}$. Quocirca reſpectu axis AB erit totalis valor ipſius $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{8\,A^3.B}{81} + \frac{11\,A^3.B}{2 \cdot 81} = \frac{A^3.B}{6}$. Ex quo erit ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M\,(GO + \frac{A^3.B}{18\,V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

331. Stabilitas igitur reſpectu axis CD maior erit, quam ſtabilitas reſpectu axis AB ſi fuerit $A.B^3 > \frac{A^3.B}{8}$, hoc

eſt

area vero $=bb$; ſeu $bb=\frac{aa\sqrt{3}}{4}$. Ponatur pondus huius prismatis $=M$; eiusque grauitas ſpecifica ad aquam vt p ad q. atque tota altitudo $MT=WL=c$. Cum nunc CEF ſit ſectio aquae, erit $CT=\frac{pc}{q}$; atque $LO=\frac{pc}{2q}$; volumen vero partis ſubmerſae $V=\frac{pb^2c}{q}$. Totius porro prismatis centrum grauitatis ſit in G, exiſtente $LG=h$; erit $GO=\frac{pc}{2q}-h$. Ex his igitur fiet ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu cuiusque axis $=M(\frac{pc}{2q}-h+\frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}})$ $=M(\frac{pc}{2q}-h+\frac{qa^2}{24pc})$.

Coroll. 1.

337. Si priſma ex materia vniformi fuerit confectum, erit $h=\frac{1}{2}c$, atque ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit $=M(\frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}}-\frac{(q-p)c}{2q})=M(\frac{qa^2}{24pc}-\frac{(q-p)c}{2q})$.

Coroll. 2.

338. Quo ergo iſte ſitus aequilibrii ſit ſtabilis oportet vt ſit $c<\frac{qb}{\sqrt{3p(q-p)\sqrt{3}}}$ ſiue quod eodem redit $c<\frac{qa}{2\sqrt{3p(q-p)}}$. Hinc igitur innoteſcit, quam longa pars a prismate triangulari indefinitae longitudinis debeat abſcindi, vt ſitu erecto aquae innatare queat.

Coroll. 3.

339. Si ex eadem materia prisma quadrangulare conficiatur, cuius baſes ſint quadrata $=bb$, longitudo eorum c minor eſſe debet quam $\frac{qb}{\sqrt{6p(q-p)}}$ quo ſitu erecto aquae innatare poſſint. Longiora igitur in hunc finem licebit accipere prismata triangularia, quam quadrata.

S 3 Exem-

Exemplum 2.

Tab. XVII. fig. 5. 340. Sit corpus aquae innatans pyramis triangularis MNPL, cuius baſis MNP horizontaliter extra aquam emineat. Ponatur baſis MNP quae ſit triangulum aequilaterum, latus qodlibet $= a$; baſisque eiusdem $= bb$ ita vt ſit $b^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pyramidis porro altitudo WL ſit $= c$, eiusque pondus M ſe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q; ſitque CFE ſectio aquae quae pariter erit triangulum aequilaterum, cuius area ſit $=$ E. Iam erit $q : p = b^3 : E\sqrt{E}$ ſeu $\sqrt{E} = b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. et $E = b^2 \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$. Similique modo erit $LI = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $LO = \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Volumen autem partis ſubmerſae V erit $= \frac{pb^2c}{3q}$. Sit denique $LG = b$; erit ſtabilitas huius aequilibrii ſitus, quem pyramis propoſita tenet $= M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$ $= M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{a^2}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

341. Si pyramis ex materia vniformi conſtet, erit $b = \frac{3}{4}c$. Hoc igitur caſu habebitur ſtabilitas iſtius aequilibrii ſitus $= M\left(\frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right) =$ $M\left(\frac{aa}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

342. Si pyramis inſuper abeat in tetraedron ſeu pyramidem regularem, erit $c = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ſtabilitas igitur tetraedri

traedri angulo deorſum verſo aquae inſidentis erit $=$
$M a \left(\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{p}{q}} \right) = \frac{Ma\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \left(5 \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - 4 \right).$

Coroll. 3.

343. Quo ergo huiusmodi tetraedron in aqua talem ſitum aequilibrii ſeruare queat, neceſſe eſt vt ſit $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{4}{5}$ ſeu $\frac{p}{q} > \frac{64}{125}$. Eius igitur grauitas ſpecifica maior eſſe debet quam 512, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$.

Scholion.

344. Euolui hactenus eiusmodi ſectiones aquae quae ſunt figurae rectilineae, atque tres caſus tractati ſufficere poſſunt ad noſtrum inſtitutum. Progrediar itaque ad figuras curuilineas, ex iisque praecipuas, quae facillime experimentis comprobari queant, ſiciam ſectiones aquae, vt de plurimis corporibus inde iudicari queat, quemnam ſitum aquae impoſita ſint habitura, et quanta ſtabilitate in quoque aequilibrii ſitu perſiſtant.

PROPOSITIO 33.
Problema.

345. *Si corporis aquae in aequilibrio inſidentis ſectio aquae fuerit circulus* ACBD, *determinare ſtabilitatem reſpectu cuiuscunque axis* CD, *quia vbique ſtabilitas eſt eadem, qua iſte aequilibrii ſtatus gaudebit.* Tab. XVIII. fig. 1.

Solutio.

Ponatur radius circuli CI $= a$; et ducta in quadrante CIA quacunque applicata XY vocetur IX $= x$ et XY

$XY = y$ erit $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; vnde fiet $\int y^3 dx = \int dx (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$. At per reductionem formularum integralium ad ſimpliciores fit $\int dx (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2 x \sqrt{(a^2 - x^2)}}{8} + \frac{3a^4}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ponatur $x = a$; dabit $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2} \pi$ poſita $\pi : 1$ ratione peripheriae ad diametrum. Quo facto pro quadrante CIA habebitur $\int y^3 dx = \frac{3 \pi a^4}{16}$; adeoque pro toto circulo erit $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{3 \pi a^4}{4}$. Si nunc corporis pondus ſit $= M$, et volumen partis aquae ſubmerſae $= V$, atque GO denotet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis $= M (GO + \frac{\pi a^4}{4V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

346. Quia diameter ſe habet ad peripheriam vt 1 ad π, exprimet πa^2 aream circuli. Si ergo area circuli ponatur $= bb$, erit $a^2 = \frac{bb}{\pi}$ atque ſtabilitas ita exprimetur vt ſit $= M (GO + \frac{b^4}{4 \pi V})$.

Coroll. 2.

347. Si ſectio aquae eſt quadratum areae $= b^2$, tum ſtabilit inuenta eſt $= M (GO + \frac{b^4}{12 V})$, et ſi ſectio aquae eſt triangulum aequilaterum, cuius area itidem eſt $= bb$, tum ſtabilitas erat $= M (GO + \frac{b^4}{6 V \sqrt{3}})$. Vnde intelligitur ſtabilitatem circuli eſſe minimam, trianguli vero maximam.

Coroll. 3.

348. Colligere ergo hinc licet, ſi ſectio aquae fuerit polygonum regulare, ſtabilitatem prodituram eſſe eo minorem

Digitized by Google

norem, quo plura latera polygonum contineat; ceteris ſcilicet paribus.

Coroll. 4.

349. Ad maximam igitur corpori aquae innatanti ſtabilitatem reſpectu omnium axium conciliandam, conueniet corpori eiusmodi dare figuram, vt ſectio aquae fiat triangulum aequilaterum.

Exemplum 1.

350. Sit corpus aquae innatans cylindrus rectus, MNRS, in aqua erectus, cuius ſectiones horizontales ſint circuli MN, CD, et RS, aequales, quorum radius ſit $= a$. Pondus autem huius cylindri ſit M, quod ſe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q: Quare poſita totius cylindri altitudine $WL = c$ erit altitudo partis aquae ſubmerſae $IL = \frac{pc}{q}$, atque volumen partis ſubmerſae $V = \frac{\pi p a^2 c}{q}$; cuius centrum magnitudinis cadet in O vt ſit $LO = \frac{pc}{2q}$. Sit autem centrum grauitatis totius corporis in G, exiſtente $LG = b$. His igitur ſubſtitutis inuenietur ſtabilitas cylindri in iſto erecto aequilibrii ſitu $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qa^2}{4pc}\right)$. Tab. XVIII. fig. 2.

Coroll. 1.

351. Cylindrus igitur in tali ſitu firmiter perſeuerabit ſi fuerit $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{4pc}$. Hoc eſt ſi fiat $LI : \frac{1}{2}CI = \frac{1}{2}CI : OH$, tumque punctum G infra punctum H cadat.

Coroll. 2.

352. Si cylindrus ex materia vniformi conſtet, erit $b = \frac{c}{2}$; hoc igitur caſu erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{4pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$. Quo igitur hic ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt ſit $c < \frac{qa}{\sqrt{2p(q-p)}}$.

Coroll. 3.

353. Si totus cylindrus fuerit datus, ex grauitate ſpecifica cognoſcetur an ſitu erecto natare queat. Natabit enim ſi fuerit $\frac{p}{q}$ vel maius quam $\frac{c+\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$ vel minus quam $\frac{c-\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$.

Coroll. 4.

354. Perſpicitur ergo ſi fuerit $c < a\sqrt{2}$. tum cylindrum ſemper ſitu erecto eſſe nataturum, quaecunque fuerit ratio grauitatum ſpecificarum.

Exemplum 2.

Tab. XVIII. fig. 3.

355. Sit corpus conus rectus MLN vertice deorſum verſo aquae innatans, cuius baſis radius $WM = WN = a$; et altitudo $WL = c$. Sit eius grauitas ſpecifica ad aquam vt p ad q: erit ſectionis aquae CO radius $IC = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $IL = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Atque cum baſis MN area ſit $= \pi a^2$, erit area ſectionis aquae $= \pi a^2 \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$; vnde volumen partis ſubmerſae V erit $= \frac{\pi p a^2 c}{3q}$; atque $LO = \frac{3}{4} c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Poſito nunc $LG = b$, erit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M\left(\frac{3}{4} c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3\pi \cdot CI^4}{4pa^2c}\right) = M\left(\frac{3}{4} c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 1.

356. Si ergo conus ex materia homogenea conſtet, erit $b=\frac{3}{4}c$; hoc ergo caſu ſtabilitas erit $=\frac{3}{4}M\left(\frac{(a^2+c^2)}{c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}-c\right)$.

Coroll. 2.

357. Quo ergo iſte ſitus aequilibrii ſit ſtabilis neceſſe eſt vt ſit $\frac{p}{q}>\frac{c^6}{(a^2+c^2)^3}$. Quod niſi fuerit, conus alium quaereret ſitum, quo aquae innatet.

PROPOSITIO 34.

Problema.

358. *Sit corporis pars aquae ſubmerſa* CMLMD *ſolidum rotundum, genitum conuerſione figurae* LMC *circa axem verticalem* LI, *atque ſectio aquae ſit circulus* CD *ſeu ſuprema ſolidi rotundi ſectio horizontalis. Determinare huius corporis aquae inſidentis ſtabilitatem.* Tab. XVIII. fig. 4.

Solutio.

Sit ſectionis aquae ſemidiameter $IC=a$; atque longitudo axis $IL=c$; in quo poſitum ſit tum centrum grauitatis totius corporis G, tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae O. Poſitis nunc pondere corporis $=M$ et volumine partis ſubmerſae $=V$, erit ſtabilitas $=M\left(GO+\frac{\pi a^4}{4V}\right)$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$. At tam volumen V quam punctum O ex natura curua CML determinari oportet: Ad quod praeſtandum vocetur abſciſſa $LP=x$, reſpondensque applicata $PM=y$, et habebitur volumen ſolidi ex conuerſione

 partis

partis MLP orti $= \pi \int y^2 dx$, in quo intergali ſi ponatur $x = c$, quo caſu fiet $y = a$, prodibit totum partis ſubmerſae volumen V. Integrali ergo extenſo per totam figuram L M C erit $V = \pi \int y^2 dx$. Simili vero modo reperietur poſitio centri magnitudinis O partis ſubmerſae erit ſcilicet $LO = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, vtroque integrali vsque ad ſectionem aquae extenſo. Si ergo ponatur $LG = b$, quippe quod interuallum non a natura curuae CML, ſed ab indole totius corporis pendet, erit ſtabilitas iſtius ſitus aequilibrii $= M\left(\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx} - b + \frac{a^4}{4\int y^2 dx}\right) = M\left(\frac{a^4 + 4\int y^2 x dx}{4\int y^2 dx} - b\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

359. Ad ſtabilitatem ergo huiusmodi corporum inveniendam, duplex integratio eſt inſtituenda; integrari enim debent hae duae formulae differentiales $y^2 dx$ et $y^2 x dx$

Coroll. 2.

360. Quoties igitur hae duae formulae algebraicam admittunt integrationem, toties ſtabilitas algebraice exprimi poterit. Ad quadraturas curuarum autem erit confugiendum, ſi vel alterutra vel vtraque integrari nequeat.

Scholion.

361. Ex aequatione autem, quae habebitur inter x et y, qua curuae LMC natura exprimitur colligetur, vtrum formulae $y^2 dx$ et $y^2 x dx$ ſint algebraice integrabiles, an a quadraturis pendeant. Hic autem conueniet omnes aequationes algebraicas inter x et y indicari, quae vtramque formu-

Digitized by Google

formulam reddant algebraice integrabilem, quo generatim intelligatur, quaenam curuae algebraicae pro curua generatrice LMC aſſumtae producant ſtabilitatem algebraice expreſſam. Ad hoc igitur inueſtigandum aſſumo duas quascunque quantitates algebraicas P et Q, quarum vel altera alterius ſit functio algebraica, vel ambae functiones algebraicae tertiae cuiusdam variabilis puta z; et facio $\int yydx = P$, et $\int yyxdx = Q$. Ex his igitur erit $y^2 = \frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{xdx}$; vnde reperitur $x = \frac{dQ}{dP}$; atque $y^2 = \frac{dP^3}{dPddQ - dQddP}$, qui ſunt generales valores algebraici pro x et y, qui primo praebebunt aequationem inter x et y algebraicam, et deinde ſtabilitatem producent algebraice expreſſam, quippe quae erit $= M(\frac{a^4 + 4Q}{4P} - b)$. Sed ſtabilitatem in ſolutione problematis generaliter inuentam expediet exemplis nonnullis illuſtrare.

Exemplum 1.

362. Sit corporis pars aquae immerſa CLD portio ſphaerae, cuius radius ſit b; erit $b - c = \sqrt{(bb - aa)}$, hincque $b = \frac{aa + cc}{2c}$. Cum igitur LMC ſit arcus circuli radii $\underline{b}$, erit $y^2 = 2bx - xx$, ideoque $\int y^2 dx = bxx - \frac{1}{3}x^3$. Facto ergo $x = c$; erit $\int yydx = bcc - \frac{1}{3}c^3 = \frac{c(3aa + cc)}{6}$. Deinde habebitur $\int yyxdx = \frac{2bx^3}{3} - \frac{1}{4}x^4 = \frac{2bc^3}{3} - \frac{1}{4}c^4$ poſito $x = c$, ſubſtituto autem loco $\underline{b}$ valore per $\underline{a}$ et $\underline{c}$ definito erit $\int yyxdx = \frac{cc(4aa + cc)}{12}$. His igitur integralibus inuentis prodibit ſtabilitas quaeſita $= M(\frac{3a^4 + 4aacc + c^4}{2c(3aa + cc)} - b) = M(\frac{aa + cc}{2c} - b) = M(b - b)$.

Coroll. 1.

363. Cum ſtabilitas ſit inuenta $= M(b-b)$, erit ea proportionalis interuallo, quo centrum grauitatis G infra centrum ſphaerae cadit. Eiusmodi igitur corpus firmiter ſuum ſitum tenebit, ſi centrum grauitatis infra ſphaerae, cuius pars ſubmerſa eſt portio, centrum cadat.

Coroll. 2.

364. Sin autem centrum grauitatis G in ipſum ſphaerae centrum cadat, tum ſitus aequilibrii erit indifferens, id quod accidit in globis ex materia vniformi confectis; qui aquae inſidentes omnes ſitus habebunt aequilibrii proprietate gaudentes, nullum autem neque ſtabilem, neque inſtabilem ſed omnes indifferentes.

Exemplum 2.

365. Sit curua LMC parabola cuiuscunque ordinis, ſcilicet $y^m = b^{m-n} x^n$. Erit ergo $a^m = b^{m-n} \iota^n$, atque $b = \frac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$. Cum autem ſit $y^2 = b^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$; erit $\int y^2 dx = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m} = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m}$ poſito c loco x, quo integrale ad ſectionem aquae CD vsque pertingat. Simili autem modo erit $\int yyx\,dx = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{2m+2n}$. Ex quibus integralibus obtinebitur ſtabilitas quaeſita $= M \left(\frac{a^4 + \frac{2m}{m+n} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{\frac{4m}{2n+m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}} - b \right)$ Subſtituto autem loco

b va-

b valore aſſignato $\frac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$ ex quo ſit $b^{\frac{2m-2n}{m}} = a^2 c^{\frac{-2n}{m}}$,

prodibit ſtabilitas $= M \left(\frac{a^2 + \frac{2m}{m+n} c^2}{\frac{4m}{m+2n} c} - b \right)$.

Coroll. 1.

366. Stabilitas igitur haec, ſi in formula eliminetur a eiusque loco introducatur b hoc modo exprimi poteſt, vt ſit $= M \left(\frac{2n+m}{2n+2m} c + \frac{2n+m}{4m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n-m}{m}} - b \right)$. Ex qua formula datis b et c, radius ſectionis aquae ſponte determinatur.

Coroll. 2.

367. Manifeſtum autem eſt ex iſtis expreſſionibus ſtabilitatem eo fore maiorem, quo minor fuerit fractio $\frac{m}{n}$. Si enim m eſſet $= 0$, tum ſtabilitas prodiret infinite magna, nec hic autem caſus nec alii finitimi in rerum natura locum inueniunt.

Coroll. 3.

368. Si maneat altitudo b eiusdem quantitatis, ſtabilitas fiet infinita ſiue ſit $c = 0$ ſiue $c = \infty$, minima ergo erit ſtabilitas ſi fuerit $aa = \frac{2m}{m+n} cc$ ſiue $c = a \sqrt{\frac{m+n}{2m}}$. In caſu ergo parabolae conicae, quo $m = 2$, $n = 1$ ſtabilitas erit minima ſi ſit $c = a \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Pro-

Digitized by Google

Propoſitio 35.
Problema.

Tab. XVIII. fig. 5.

369. *Si corporis aquae inſidentis in aequilibrio ſectio aquae fuerit ellipſis* ACBD, *determinare ſtabilitatem huius aequilibrii ſitus reſpectu vtriusque axis maioris* CD *et minoris* AB.

Solutio.

Ponatur ſemiaxis maior $CI = a$; ſemiaxis minor $IA = b$; erit poſita abſciſſa $IX = x$, et applicata $XY = y$, inter x et y haec aequatio $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Hinc igitur fiet $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3}\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, quod integrale poſito $x = a$, et denotante π peripheriam circuli cuius diameter eſt $= 1$, abibit in $\frac{3\pi ab^3}{16}$ quod proinde quater ſumtum dabit pro tota ſectione aquae $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{3\pi ab^3}{4}$. Si nunc pondus corporis ſit $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$, atque GO indicet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit ſtabilitas corporis reſpectu axis $CD = M\left(GO + \frac{\pi ab^3}{4V}\right)$. Commutatis autem inter ſe ſemiaxibus a et b prodibit ſtabilitas reſpectu axis minoris $AB = M\left(GO + \frac{\pi a^3 b}{4V}\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

370. Stabilitas igitur, qua corpus inclinationi circa axem maiorem reſiſtit, minor eſt quam ſtabilitas reſpectu axis minoris. Quare ſi ſitus fuerit ſtabilis reſpectu axis maioris, eo ſtabilior erit reſpectu axis minoris.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 2.

371. Tota ellipſis area eſt $= \pi ab$; ſi ergo ponatur area ellipſis $= E$, erit ſtabilitas reſpectu axis maioris CD $= M(GO + \frac{Eb^2}{4V})$, ſtabilitas vero reſpectu axis minoris AB erit $= M(GO + \frac{Ea^2}{4V})$.

Scholion.

372. Superfluum fore arbitror hanc propoſitionem exemplis illuſtrare, cum ſuperiora exempla pro circulo data huc facillime poſſint accomodari, atque inſuper parum commodi tam ad experimenta inſtituenda, quam ad pleniorem intelligentiam ſequentium deriuari queat. Quamobrem miſſis his, quibus ſectio aquae praecipue ſpectatur, ad varias figuras ipſius partis ſubmerſae conſiderandas progrediar, vbi per calculum ſum inquiſiturus tum in ipſum partis ſubmerſae volumen, tum etiam in eius centrum magnitudinis, quippe quae res praeter ſectionem aquae imprimis ad ſtabilitatem cognoſcendam inſeruiunt. Eiusmodi autem conformationes partis ſubmerſae prae aliis ſum contemplaturus, quae quandam habeant ſimilitudinem cum nauibus reliquisque vaſis, quae ad motum ſuper aqua adhiberi ſolent, quo inde non contemnenda commoda ad nauigationem ſolide tractandam conſequantur. Figuram igitur partis ſubmerſae infra terminatam ponam linea recta horizontali, quae in nauibus ſpina dici conſueuit, et ad quam omnes ſectiones transuerſales verticaliter factae finiuntur. His autem ſectionibus transuerſalibus, quae ſunt verticales et ad ſpinam normales figura partis aquae ſubmerſae determinatur. Quamobrem quomodo tum ex ſe-

V ctione

ctione aquae, tum ex huius modi ſectionibus transuerſalibus ſtabilitatem definiri oporteat, docebo.

PROPOSITIO 36.
Problema.

Tab. XIX. fig. 1. 373. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque* AM BMA *diametro* AB *praedita, pars vero ſubmerſa terminetur tum infra ſpina horizontali* EF *ſub axe* AB *poſita, tum ad latera parabolis conicis* MQ *vertices in* M *et axes horizontales ad* AB *normales habentibus; inuenire ſtabilitatem corporis talem aequilibrii ſitum in aqua tenentis, reſpectu axis* AB.

Solutio.

Conſideretur ſectio partis ſubmerſae quaecunque M QM verticalis et ad diametrum AB normalis voceturque abſciſſa AP $= x$; MP $=$ MP $= y$; et profunditas conſtans fig. 2. PQ $=$ AE $= c$. Iam ſeorſim contemplemur ſectionem M QM, in qua curua MQ et MQ ſunt parabolae Appollonianae vertices in M et axem MM communem habentes. Cum nunc ſit PM $= y$ et PQ $= c$, erit parameter vtriusque parabolae $= \frac{c^2}{y}$. Quare ſi dicatur MX $= t$ et XY $= u$, erit $u^2 = \frac{c^2 t}{y}$; et area MXY $= \frac{2}{3} t u = \frac{2ct}{3} \sqrt{\frac{t}{y}}$, vnde area tota MQM poſito $t = y$ fiet $= \frac{4}{3} c y$. Centrum grauitatis autem o areae MQM reperietur ſumendo integrale $\int \frac{1}{2} uudt$ idque diuidendo per ſudt; eſt vero $\int \frac{1}{2} uudt = \frac{cct}{4y}$, quod diuiſum per ſudt $= \frac{2ct}{3} \sqrt{\frac{t}{y}}$, dat $\frac{3c}{8} \sqrt{\frac{t}{y}}$ ita vt poſito $t = y$ futurum ſit P$o = \frac{3}{8} c$. Cum igitur omnium fig. 1. ſectionum eiusmodi MQM centrum grauitatis in eandem a diametro AB diſtantiam cadat, totius partis ſubmerſae

cen-

Digitized by Google

centrum magnitudinis ſitum erit in O vt ſit IO $= \frac{2}{5}c$. Multiplicetur porro ſectionis MQM area $\frac{2}{3}cy$ per dx, atque integrale $\frac{2}{3}c\int y\,dx = \frac{2}{3}c$. MAM dabit ſoliditatem AEQMM, quamobrem ſi area totius ſectionis aquae AMBM ponatur $=$ E; erit ſoliditas partis ſubmerſae $= \frac{2}{3}$ E c. Ponatur nunc pondus totius corporis $=$ M, ſitque eius centrum grauitatis G in recta verticali IH per centrum magnitudinis O ducta, erit ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis AB$=$M $(\mathrm{IG} - \frac{2}{5}c + \frac{\int y^3 dx}{Ec}$. Eſt enim propoſitione 29 huc traducta $z = y$, atque V$= \frac{2}{3}$Ec. Poſito ergo IG$= b$, erit ſtabilitas quaeſita $= \mathrm{M}(b - \frac{2}{5}c + \frac{\int y^3 dx}{Ec})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

374. Hinc etiam diſtantia rectae verticalis IH *a* puncto A inuenietur ſumendo integrale ipſius $\frac{2}{3}cyx\,dx$, idque diuidendo per $\int \frac{2}{3}cy\,dx$, ita vt futurum ſit AI$= \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$.

Coroll. 2.

375. Ex hac igitur formula perſpicuum eſt rectam HI per ipſum centrum grauitatis ſectionis aquae I eſſe tranſituram, ita vt hoc caſu tria centra grauitatis ſcilicet totius corporis, partis ſubmerſae, et ſectionis aquae in eadem recta verticali ſint ſita.

Coroll. 3.

376. Data ergo pro huiusmodi corporibus ſectione aquae, ex qua tam eius area E quam $\int y^3 dx$ innoteſcat, ſtabilitas ſitus aequilibrii facile definiri poterit.

Digitized by Google

Coroll. 4.

377. Quia ergo in tali corpore centrum grauitatis ſectionis aquae I verticaliter imminet centro grauitatis G totius corporis G, inter oſcillandum centrum grauitatis neque aſcendet neque deſcendet, et hancobrem motus oſcillatorius erit maxime tranquillus.

Scholion.

378. Satis igitur idonea eſt haec forma parabolica, quae ſectionibus nauium transuerſalibus tribuatur, cum per eas id commodi acquiratur, vt et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem incidat, et centrum grauitatis ſectionis aquae. Hinc enim euenit, vti ſupra vidimus, vt dum oſcillationes a naue peraguntur, modo ſint minimae, centrum grauitatis in quiete permaneat, quod plurimum iuuat ad iſtum motum maxime tranquillum efficiendum. Non ſolum autem figura parabolica ad hunc effectum producendum eſt accommodata, ſed praeterea omnes parabolae cuiusque ordinis idem praeſtant, innumerabilesque aliae curuae, quae ita ſint comparatae vt areae earum MQM proportionales ſint ipſis ordinatis MPM ſectionis aquae; ſiquidem ſpina corporis aquae innatantis eſt horizontalis. At ſi tota ſpina non eſt linea recta, ſed vel tota curua, vel tantum ad proram puppimque ſurſum erecta, tum peculiaribus opus eſt curuis ad idem commodum obtinendum. Quamobrem primo parabolas ſuperiorum graduum pro caſu, quo tota ſpina eſt recta horizontalis, euoluam, ac deinde curuas idoneas ad ſpinas non rectas inueſtigabo.

PRO-

PROPOSITIO 37.
Problema.

379. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque* AMBM *praedita diametro* AB *ſub qua in plano verticali exiſtat ſpina recta horizontalis* EF, *ad quam terminetur pars corporis aquae immerſa parabolis cuiusuis ordinis* MQ, *vertices in* M *habentibus*, *axesque horizontales* MM: *determinare ſtabilitatem reſpectu axis* AB. Tab. XIX. fig. 1.

Solutio.

Poſitis vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $AE = PQ = c$; fig. 2. conſideretur ſectio tranſuerſalis MQM ſeorſim, in qua ſumta abſciſſa MX ſit $= t$ et applicata $XY = u$, natura vero huius parabolae exprimatur hac aequatione $u = \frac{t^n}{p^{n-1}}$, exiſtente p parametro. Quia autem facto $t = MP = y$, ſit $u = PQ = c$ erit $c = \frac{y^n}{p^{n-1}}$ atque $p^{n-1} = \frac{y^n}{c}$. Area autem MXY erit $= \frac{t^{n+1}}{(n+1)p^{n-1}} = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)y^n}$ vnde totius ſectionis MQM prodibit area $= \frac{2cy}{(n+1)}$. Deinde huius ſectionis centrum grauitatis ſitum erit in o vt ſit $Po = \frac{\int uudt}{2\int udt}$ poſito poſt integrationem $t = y$. At eſt $\int u^2 dt = \frac{\int t^{2n} dt}{p^{2n-2}}$ $= \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)p^{2n-2}} = \frac{c^2 t^{2n+1}}{(2n+1)y^{2n}} = \frac{c^2 y}{2n+1}$ poſito $t = y$. Quare cum ſit $2\int udt = \frac{2cy}{n+1}$; erit $Po = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Cum igitur

tur omnium ſectionum trausuerſalium centra grauitatis in eandem rectam horizontalem cadant, partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſitum erit in O, vt ſit $IO = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Capacitas autem partis ſubmerſae erit $= \int \frac{cy\,dx}{n+1} = \frac{c}{n+1}$ in aream AMBMA; ſi ergo ſuperficies ſectionis aquae dica-
fig. 1. tur $= E$, erit volumen partis ſubmerſae $= \frac{cE}{n+1}$. Sit denique totius corporis centrum grauitatis ſitum in G, vt ſit $IG = b$; atque pondus totius corporis $= M$, erit $GO = b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$, atque in propoſitione generali (298) fiet $\int (y^3 + z^3)\,dx = 2\int y^3\,dx$, ob $z = y$, et $V = \frac{cE}{n+1}$. Hinc igitur orietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M\left(b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)} + \frac{2(n+1)\int y^3\,dx}{3Ec}\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

380. Cum quaeuis ſectio transuerſalis MQM proportionalis ſit ordinatae ſectionis aquae MM, perſpicuum eſt centrum grauitatis ſectionis aquae I et centrum magnitudinis partis ſubmerſae O in eandem rectam verticalem IH incidere.

Coroll. 2.

381. Dato igitur in eiusmodi corpore centro grauitatis I ſectionis aquae, ſimul locus centri magnitudinis O innoteſcit; atque in rectam verticalem IOH etiam centrum grauitatis totius corporis G poſitum ſit neceſſe eſt.

Coroll. 3.

382. Si fiat $n = 1$, ſectiones transuerſales fient triangula, ac lineae MQ rectae. Hoc igitur caſu erit volumen

Digitized by Google

lumen partis ſubmerſae $V = \frac{cE}{2}$ atque ſtabilitas prodibit $=$ $M\,(b - \frac{c}{3} + \frac{4\int y^3\,dx}{3Ec})$.

Coroll. 4.

383. Sin autem ſit $n < 1$, attamen $n > 0$, curvarum MQ tangentes in M erunt verticales, atque pars ſubmerſa figuram habebit gibbam ſeu conuexam. At ſi $n > 1$ figura fiet concaua.

Coroll. 5.

384. Si ſtabilitas reſpectu cuiuscunque alius axis horizontalis per I tranſeuntis deſideretur in formula, nil erit mutandum, niſi expreſſio $2\int y^3 dx$, quae ad illum axem accommodari debebit. Cetera enim omnia non pendent a poſitione axis aſſumti AB.

Scholion.

385. Eadem proprietas, quam habent tum conicae parabolae tum omnes reliquae cuiusque ordinis, competit in innumerabiles alias curuas, quae id circo eodem ſucceſſu ſectionibus transuerſalibus MQ tribui poterunt. Omnes enim curuae eodem modo ſatisfaciunt, quae ita ſint comparatae, vt earum areae MQM quae aequalibus abſciſſis reſpondent, ipſis ordinatis MM ſint proportionales, quippe ex quo fit, vt partis ſubmerſae centrum magnitudinis O verticaliter infra centrum grauitatis I ſectionis aquae cadat. Pro his igitur curuis aequatio inter u et t ita debet eſſe comparata, vt primo fiat $u = 0$, facto $t = 0$, atque vt deinde fiat $u = c$ poſito $t = y$. Tertio vero

vero area $\int u\,dt$, ſi ponatur $t=y$, talem formam induere debebit $\frac{mcy}{n}$. Haec autem requiſita ſequenti modo impetrabuntur: In genere ſit T functio quaecunque nullius dimenſionis ipſarum $t=y$, ſeu functio quaecunque ipſius $\frac{t}{y}$ quae euaneſcat facto $t=0$. Haec ergo functio T poſito $t=y$ abibit in numerum conſtantem, qui ſit n, quo facto exhibebit iſta aequatio $u=\frac{cT}{n}$ curuam quaeſito ſatisfacientem. Namque facto $t=0$, erit $u=0$, atque poſito $t=y$ fit $u=c$. Denique erit $\int u\,dt=\int\frac{cT\,dt}{n}=\frac{cy}{n}\int\frac{T\,dt}{y}$. At $\int\frac{T\,dt}{y}$ dabit functionem ipſius $\frac{t}{y}$, quae ideo abibit in numerum conſtantem puta m facto $t=y$; vnde area ſectionis transuerſalis MQM orietur $=\frac{2mcy}{n}$. Praeterea vero etiam interuallum Po, quo centrum grauitatis o ſectionis transuerſalis cuiusuis ſub horizontem cadit erit conſtans: Cum enim ſit $Po=\frac{\int uu\,dt}{2\int u\,dt}$ poſito poſt integrationem $t=y$; erit $\int uu\,dt=\frac{cc}{nn}\int T^2dt=\frac{c^2y}{nn}\int\frac{T\,dt}{y}$. Sed $\int\frac{T^2dt}{y}$, dabit functionem ipſius $\frac{t}{y}$, quae facto $t=y$ abibit in numerum conſtantem, qui ſit K, ita vt ſit $\int uu\,dt=\frac{Kc^2y}{nn}$, quae expreſſio diuiſa per $2\int u\,dt=\frac{2mcy}{n}$ dabit $Po=\frac{Kc}{2mn}$, cui expreſſioni conſequenter aequale quoque eſt interuallum IO.

PROPOSITIO 38.
Problema.

Tab XIX. fig. 3. 386. *Sit ſectio aquae curua quaecunque* AMBMA *praedita diametro* AB, *ſub qua in plano verticali pars ſubmerſa terminetur ad ſpinam* EHF *vtcunque curuilineam*, *in-*

inuenire figuram idoneam pro ſectionibus tranſuerſalibus, vt centrum magnitudinis partis ſubmerſae O verticaliter infra centrum grauitatis ſectionis aquae I cadat.

Solutio.

Poſitis $AP = x$; $PM = PM = y$, et $PQ = z$; dabitur ob ſectionem aquae datam y per x; et ob figuram ſpinae EHF pariter datam etiam z per x. Quaeſito autem commodiſſime ſatisfiet, ſi ſingulis ſectionibus tranſverſalibus MQM eiusmodi figura tribuatur, vt earum areae fiant proportionales ordinatis MM ſeu ipſis y. Ad hoc efficiendum ducta in ſectione tranſuerſali applicata quacunque XY, ſit $MX = t$ et $XY = y$, atque aſſumatur ad naturam curuae MQ exprimendam indefinita iſta aequatio $u = \frac{At^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Bt^{m-1}}{y^{m-1}} + \frac{Ct^{k-1}}{y^{k-1}}$, in qua n, m, et k ſint numeri vnitate maiores, quo facto $t = 0$ fiat $u = 0$. Nunc quia facto $t = y$, fieri debet $u = z$, erit $z = A + B + C$. Porro quaeratur area $\int u\,dt$, quae erit $= \frac{At^n}{ny^{n-1}} + \frac{Bt^m}{my^{m-1}} + \frac{Ct^k}{ky^{k-1}}$; quae cum poſito $t = y$, fieri debeat ipſi y proportionalis, ponatur $= cy$, habebiturque $c = \frac{A}{n} + \frac{B}{m} + \frac{C}{k}$. Ex his conditionibus conſequitur $B = \frac{kmnc - mnz - m(k-n)A}{n(k-m)}$; atque $C = \frac{knz - kmnc + k(m-n)A}{n(k-m)}$; quamobrem pro curua quaeſita ſequens habebitur aequatio: $u = \frac{At^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{(kmnc - mnz - m(k-n)A)t^{m-1}}{n(k-m)y^{m-1}} - \frac{(kmnc - knz - k(m-n)A)t^{k-1}}{n(k-m)y^{k-1}}$: in qua praeter exponentes k, m, n quantitatem A pro arbitrio

bitrio aſſumere licet. In quantitate autem A eligenda, ad hoc praecipue attendi oportebit, vt applicata u continuo creſcat, ab M ad Q progrediendo, atque vt inter puncta M et Q curua ſit vbique conuexa, ſeu vt $\frac{du}{dt}$ continuo decreſcat, prius autem aſſequemur ſi $\frac{du}{dt}$ ab M vsque ad Q affirmatiuum valorem retineat; atque adeo in Q ſit affirmatiuum. In Q vero erit $\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}$ $((n-1)A + \frac{(m-1)}{n(k-m)}(kmnc - mnz - m(k-n)A) - \frac{(k-1)}{n(k-m)}(kmnc - knz - k(m-n)A) = \frac{1}{y}(\frac{(m-n)(k-n)}{n}A - kmc + (k+m-1)z)$. Quare eſſe debebit $A > \frac{kmnc}{(m-n)(k-n)}$ quo $\frac{du}{dt}$ maneat affirmatiuum, etiamſi z fiat minimum. At ſi aliae circumſtantiae non admittant, vt ſingulis ſectionibus transuerſalibus eiusmodi figura inducatur, tum quanto ex vna parte puncti I ſectiones transuerſales iuſto vel maiores vel minores fuerint, tanto quoque vel maiores vel minores ex altera parte fieri debebunt, vt nihilominus centrum magnitudinis partis ſubmerſae in rectam IH incidat. Q. E. I.

Coroll. 1.

387. Si numerorum n, m, et k ponatur n minimus, m medius et k maximus, ex numero n cognoſcetur poſitio tangentis ſectionum transuerſalium in M. Nam ſi $n-1$ fuerit > 1 tum tangens erit horizontalis, ſin $n-1 < 1$ verticalis, at ſi $n=2$ tum angulus erit obliquus.

Coroll. 2.

388. Si ergo ponatur $n = \frac{3}{2}$; tangens in M non ſolum fiet verticalis, ſed etiam radius oſculi in M erit finitus. Quare ſi porro ponatur $m = \frac{5}{2}$ et $k = \frac{7}{2}$ habebitur

pro

pro curua haec aequatio $u = \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{y}} + \frac{(101c-10z-10A)}{12}\frac{t\sqrt{t}}{y\sqrt{y}} - \frac{(101c-41z-21A)t^2\sqrt{t}}{12y^2\sqrt{y}}$.

Coroll. 3.

389. Quia eſſe debet $A > \frac{Kmnc}{(m-1)(z-n)} - \frac{n(k+m-1)z}{(m-n)(z-n)}$. Videamus an ſalua hac conditione tertius terminus C poſſit euaneſcere; hinc autem fit $A = \frac{mnc-nz}{m-n}$. Debebit ergo eſſe $(m+n-1)z > mnc$.

Coroll. 4.

390. Quando ergo ſpina ita eſt comparata vt z ad o usque decreſcat, tum non poterit eſſe vbique $(m+n-1)z > mnc$. et hancobrem his caſibus trinomia functione ipſius t ad u deſignandum vti oportebit.

Scholion.

391. Perſpicuum autem eſt eiusmodi occurrere poſſe caſus, quibus z tam diuerſorum capax ſit valorum, vt area ſectionum transuerſalium ipſi y ſoli omnino non proportionalis reddi queat; ſiquidem figurae non admodum diſſimiles deſiderentur earum, quae in nauibus adhiberi ſolent. Nam vel vbi altitudo z maior exiſtit, ibi transverſalis nimium coarctata eſſe deberet, vel vbi z vehementer fit diminuta, ibi area ſectionis tanta eſſe deberet, vt limitibus praeſcriptis contineri non poſſet. Eiusmodi igitur caſibus eam medelam afferre conueniret, cuius in ſolutione mentionem feci, vt ſectiones transuerſales, quae per regulam nimis deformes prodirent, vel augeantur vel

minuantur ex vtraque parte aequaliter, quo locus centri grauitatis communis conſeruetur. At ne tali ſcientiae minus conueniente correctione ſit opus, praeſtabit tum figuram ſectionis aquae, tum ſpinae ad formam ſectionum transuerſalium idoneam accomodare. Quem in finem pono ſectionum transuerſalium areas tenere rationem compoſitam amplitudinum in ſectione aquae et profunditatum, ſeu eſſe vbique vt yz; namque hoc poſito quae figura vno caſu erit apta ad praxin, eadem locum habebit in omnibus reliquis. Eiusmodi autem curuae hac proprietate praeditae pro ſectionibus transuerſalibus innumerabiles exhiberi poſſunt, quae omnes ſequenti aequatione generali continentur, ſit T functio quaecunque ipſius $\frac{t}{y}$ euaneſcens poſito $t = 0$; quae facto $t = y$ abeat in numerum conſtantem $\underline{n}$. tum fiat $u = \frac{zT}{n}$. Ex hac ehim aequatione fit $u = 0$, ſi $t = 0$ et $u = z$ ſi $t = y$; ac denique erit ſudt $= \frac{\int zTdy}{n}$ $= \frac{Zy}{n}\int\frac{Tdy}{y}$; at $\int\frac{Tdy}{y}$ facto $t = y$ abit in numerum conſtatem $\underline{m}$ ita vt area tota fiat $= \frac{2m^2yz}{n}$.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tab. XIX. fig. 3. 392. *Si areae ſectionum trauſuerſalium* MQM *fuerint in ratione compoſita baſium* MM *et profunditatum* PQ; *inuenire tum pro ſectione aquae* AMBM *tum pro ſpina* EHF *figuras idoneas, ut centra grauitatis ſectionis aquae* I *et voluminis partis ſubmerſae* O *in eandem rectam verticalem* IH *incidant.*

So-

Solutio.

Sit longitudo diametri ſectionis aquae $AB = a$; et quoniam partes ſectionis aquae vtrinque circa AB ſimiles et aequales eſſe debent, atque curuam AMBM vbique concauam verſus AB eſſe conuenit, ſumatur pro ea iſta aequatio $y = (A + Bx)\sqrt{(ax - xx)}$. At vero pro ſpina accipiatur haec aequatio $z = \frac{(\alpha + \beta x)(ax - xx)}{A + Bx}$, quo ea tam in A quam in B ſectioni aquae occurat, idque ſub obliquis angulis, prout in nauibus fieri ſolet. Hic ſcilicet poſitum eſt vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $PQ = z$. Quo nunc puncta I et O in eandem rectam verticalem incidant, debet poſt integrationem peractam facto $x = a$ fieri $\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int yzx\,dx}{\int yz\,dx}$: ad haec integralia autem capienda ſaltem pro caſu $x = a$ inſeruiet hoc theorema vi cuius eſt $\int(1 + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \text{etc.})\,dx(ax - xx)^n$ $= \left(1 + \frac{(n+1)Ka}{(2n+2)} + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} La^2 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} Ma^3 + \text{etc.}\right)\int dx(ax - xx)^n$. Hinc igitur erit $\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx} =$

$$\frac{\int(Ax + Bx^2)\,dx\sqrt{(ax - xx)}}{\int(A + Bx)\,dx\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2}{A + \frac{1}{2}Ba} = AI.$$

At cum ſit $yz = (\alpha + \beta x)(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; erit $\frac{\int yzx\,dx}{\int yz\,dx} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha a + \frac{7}{24}\beta a^2}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a}.$$

Qui valores inter ſe aequati dant

$$\frac{A + \frac{5}{8}Ba}{A + \frac{1}{2}Ba} = \frac{\alpha + \frac{7}{12}\beta a}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a},$$

vnde fit $B\beta a = 4A\beta - 6B\alpha$; ſeu $\beta = \frac{6B\alpha}{4A - Ba}$. Quamobrem ſi pro ſectione aquae aſſumatur haec aequatio $y = (m + \frac{nx}{a})\sqrt{(ax - xx)}$, tum pro

ſpina aſſumenda erit aequatio haec: $z = \frac{K((4m-n)a+6nx)(ax-xx)}{(4m-n)a(ma+nx)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

393. Cum ſit $AI = \frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2}{A + \frac{1}{2}Ba}$ ob $A = m$ et $B = \frac{n}{a}$ erit $AI = \frac{a(\frac{1}{2}m + \frac{5}{16}n)}{m + \frac{1}{2}n}$. Quamobrem habebitur $AI = \frac{1}{2}a + \frac{na}{16m+8n}$. Quoties igitur n eſt numerus affirmatiuus ſeu m et n numeri eiusdem ſigni, erit $AI > \frac{1}{2}AB$.

Coroll. 2.

394. Si $n = 0$, fiet aequatio pro ſectione aquae $y = m\sqrt{(ax-xx)}$, quo ergo caſu ſectio aquae erit ellipſis, cui figura ſpinae, reſpondet $z = \frac{K}{ma}(ax-xx)$, quae ideo erit parabola. Hoc autem caſu punctum I in medium rectae AB incidit.

Coroll. 3.

395. Si ponatur $m = 0$, quo ſectio aquae hac aequatione exprimatur $y = \frac{nx}{a}\sqrt{(ax-xx)}$ erit figura ſpinae $z = \frac{K(a-6x)(a-x)}{na}$, quae autem figura eſt inepta, ob $z = 0$, ſi eſt $x = \frac{1}{6}a$.

Coroll. 4.

396. Ne igitur alicubi inter A et B fiat $z = 0$ neceſſe eſt vt ſit $a + \frac{6nx}{4m-n} > 0$, ſi quidem x inter limites 0 et a contineatur. Fit autem $a + \frac{6nx}{4m-n} = 0$ ſi eſt

$x =$

$x=\frac{a(n-4m)}{6n}$; quare $\frac{n-4m}{6n}$ vel minus eſſe debet quam o, vel maius quam I.

Coroll. 5.

397. Fiat $n=4m$, qui caſus id habet ſingulare, quod cum ſit pro ſectione aquae $y=(m+\frac{4mx}{a}\sqrt{(ax-xx)}$, fiat pro ſpina $z=\frac{Kxx(a-x)}{a(a+4x)}$ cuius igitur tangens in A erit horizontalis. At interuallum AI prodit $=\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}a=\frac{9}{16}a$.

Scholion 1.

398. Propoſitio haec latiſſime patet, atque omnes fere figuras, quae vulgo in conſtructione nauium adhiberi ſolent, in ſe complectitur. Eſt enim ad infinitas figuras ſectionum transuerſalium accomodata, prout ex §. 391 videre licet, atque inſuper innumerabiles in ſe continet figuras ſectionum aquae ab vſu non abhorentes; ita vt ex ea tam de conſtructione nauium iudicari, quam nouae nauium formae idoneae inueniri queant, quae quidem hactenus expoſitis principiis ſint conſentaneae. Latiore quidem ſenſu, ſi opus fuiſſet, ſolutionem adornare potuiſſemus, ſi pro ſectione aquae eiusmodi aequationem $y=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.})\sqrt{(ax-xx)}$, pro ſpina vero hanc aequationem $z=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})(ax-xx)}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ect.}}$ aſſumſiſſemus; tum enim in figura ſpinae plures litterae indeterminatae relictae fuiſſent, quarum determinatione multo plures figurae produci potuiſſent. Prodiiſſet autem haec aequatio figuram ſpinae ad datam ſectionem aquae accommodans

$$\frac{\frac{1}{2}Aa+\frac{5}{16}Ba^2+\frac{7}{32}Ca^3+\frac{21}{128}Da^4+\text{etc.}}{A+\frac{1}{2}Ba+\frac{5}{16}Ca^2+\frac{7}{32}Da^3+\text{etc.}}=\frac{7}{8}a$$

$$\frac{\frac{3}{8}\alpha a + \frac{7}{24}\beta a^2 + \frac{9}{16}\gamma a^3 + \frac{33}{128}\delta a^4 + \text{etc.}}{\alpha + \frac{1}{3}\beta a + \frac{7}{24}\gamma a^2 + \frac{3}{16}\delta a^3 + \text{etc.}} = \text{A I.}$$

Ex qua innumeris modis relatio coefficientium A, B, C, D etc. atque α, β, γ, δ etc. definiri poteſt.

Scholion 2.

399. Satis iam fuſe in iſto capite omnia, quae ad ſtabilitatem corporum aquae in quopiam aequilibrii ſitu inſidentium, cognoſcendam et diiudicandam pertinent, explanaſſe mihi videor, neque quicquam deeſſe videtur, quod in hac doctrina amplius deſiderari poſſit. Quamobrem huic capiti finem imponam eo progreſſurus quo ea, quae hic tractata ſunt, magnam afferent vtilitatem. In ſequente enim capite in effectum propius inquiram, quem vires quaecunque nauem ſeu corpus aquae innatans quodcunque ſollicitantes producant quo intelligatur, quid tam vis venti et remorum, quam gubernaculum et alliſio aquae ipſius in naue efficiant. Cum autem motus progreſſiuus ipſe ſine calculo reſiſtentiae cognoſci nequeat, quem in quinto denique capite plenius exponere conſtitui, hic tantum ſollicitationem ad iſtum motum et accelerationem momentaneam conſideraſſe contentus ero. In hoc vero praecipue incumbam, vt quantum quaeuis potentiae nauem ex ſitu aequilibrii deturbent, accurate definiam, atque in hunc finem ad tres ſupra memoratos axes, quos in quaque naui concipere licet, imprimis reſpiciam: circa quos omnis inclinatio et declinatio fieri cenſenda eſt.

CAPVT

Digitized by Google

Caput Quartum
DE
EFFECTV VIRIVM CORPORA AQAE INSIDENTIA SOLLICITANTIVM.
PROPOSITIO 40.
Theorema.

400.

Si in naui ſeu vaſe quocunque AB, *cuius pondus ſit* $=$M, Tab. XX. fig. 1. *onus* P *cuius pondus ſit* $=$m, *per ſpatium* Pp *transferatur in* p; *totius vaſis centrum grauitatis* G *transferetur ſecundum directionem* Gg *ipſi* Pp *parallelam in* g: *vt ſit* $Gg = \frac{m\,Pp}{M}$.

Demonſtratio.

Sit Z centrum grauitatis nauis ſeu vaſis demto onere P, erunt puncta Z, G et P in linea recta poſita, ita vt ſit $ZG : PG = m : M - m$ ſeu $ZG : ZP = m : M$. Tranſlato iam onere m ex P in p, totum corpus quod ex duabus partibus $M - m$ et m compoſitum conſidero, partis alterius $M - m$ centrum grauitatis vt ante habebit in Z, alterius vero partis m centrum grauitatis nunc erit in p. Quamobrem totius corporis M centrum grauitatis nunc reperietur in rectae Zp puncto g, ita vt ſit $Zg : pg = m : M - m$ ſeu $Zg : Zp = m : M$; vnde perſpicitur rectam Gg parallelam fore rectae Pp, et triangula ZGg et ZPp inter ſe ſimilia. Propterea erit $Gg : Pp = ZG : ZP = m : M$, ex quo prodit $Gg = \frac{m\,Pp}{M}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

401. Quoniam onerum traslatione nauis ſeu vaſis cuiusque aquae inſidentis pondus non mutatur ante et poſt translationem oneris, aequale volumen aquae immergetur.

Coroll. 2.

402. Corpus igitur in aqua eundem retinebit ſitum onere quodam tranſpoſito, ſi centrum grauitatis verticaliter vel ſurſum vel deorſum transfertur; id quod euenit, ſi onus verticaliter vel ſurſum vel deorſum transportatur.

Coroll. 3.

403. Ex capite autem praecedente conſtat, centro grauitatis corporis ſurſum translato ſtabilitatem ſitus aequilibrii diminui; eandem vero augeri centro grauitatis deorſum translato.

Coroll. 4.

404. Si igitur onus m verticaliter vel ſurſum vel deorſum transfertur per ſpatium s, centrum grauitatis vel aſcendet vel deſcendet per ſpatium $\frac{ms}{M}$: atque idcirco ſtabilitas vel diminuetur vel augebitur quantitate ms.

Coroll. 5.

405. Sin autem onus quodpiam vel horizontaliter vel oblique promoueatur, tum ſitus aequilibrii non conſeruabitur, ſed corpus ex eo inclinabitur; quia iſto oneris motu centrum grauitatis corporis de recta verticali per centrum magnitudinis partis ſubmerſae ducta depellitur.

Cor.

Coroll. 6.

406. Hinc etiam facile mutatio ſitus centri grauitatis colligetur, ſi plura onera vtcunque transponantur in alia loca. Ad hoc enim tantum opus eſt cuiusque oneris motum ſeorſim conſiderare.

Scholion.

407. In hoc capite ante omnia viſum eſt indagare, quantum ſitus aequilibri corporis aequae innatantis immutetur, dum centrum grauitatis ſolum de ſuo loco mouetur; priusquam enim in effectus virium externarum inquiratur, conuenit eas mutationes euoluiſſe, quae in ipſis nauibus nullis accedentibus viribus alienis oriri poſſunt; etiamſi eiusmodi mutationes ſine viribus alienis euenire nequeant. Hancobrem primum centrum grauitatis de ſuo loco moueri conſiderabo, toto corporis pondere manente inuariato, atque qualis mutatio in ſitu aequilibrii eueniat ſcrutabor; deinde vero non ſolum ſitum centri grauitatis mutatum ſpectabo, ſed etiam ipſum pondus corporis augeri vel diminui ponam, quod fit vel nouis oneribus imponendis, vel ab iis quae aderant auferendis. His enim caſibus non ſolum nauis inclinabitur, ſed etiam aquae vel magis immergetur, vel ex aqua emerget. Quamobrem facta eiusmodi mutatione non ſolum definiendum eſt, quemnam ſitum corpus ſit adepturum, ſed etiam quanta poſt mutationem futura ſit ſtabilitas. Omnes autem has mutationes tantum minimas contemplabor, cum calculi ſubleuandi cauſa, tum quod nihilominus inde iudicium de maioribus mutationibus formari poteſt; quia maiores mutationes ex minimis ſucceſſiue conflatae aeſtimari poſſunt.

Digitized by Google

PROPOSITIO 41.
Problema.

408. *Si nauis vel cuiusuis vaſis aquae inſidentis per oneris cuiuſpiam translationem centrum grauitatis aliquantillum de ſuo loco promoueatur, inuenire declinationem vaſis de priſtino aequilibrii ſitu, atque ſtabilitatem, quam tum habebit.*

Solutio.

Cum centrum grauitatis recta vel aſcendit vel deſcendit, ſitus aequilibrii nullam patitur mutationem, niſi quod eius ſtabilitas vel minuatur, vel augeatur. At ſi centrum grauitatis oblique promoueatur, tum iſte motus reſolui poterit in verticalem et horizontalem, quorum ille ſitum non afficit, hic autem omnino ad vas de priore ſitu declinandum impenditur. Quamobrem cum promotio verticalis nil habeat difficultatis, porro corporis AFB aquae ita inſidentis vt AB ſit ſectio aquae et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae, centrum grauitatis G transferri horizontaliter per Gg in g; quo facto vas circa axem ad planum OGg normalem inclinabitur, vt ſectio aquae fiat ab cum priore angulum ACa conſtituens, qui eſt angulus inclinationis, quem quaerimus; cuius ſinus ſit $= w$ poſito ſinu toto $= 1$. Exiſtente ergo ab ſectione aquae et g centro grauitatis, aequilibrium aderit, ex cuius conditione w, indeque angulus inclinationis definietur. Loco totius corporis autem tantum conſiderabo figuram planam verticalem AFB, quum ex iis, quae pro figura plana reperientur, concluſio pro ipſis corporibus facile formari poſſit; ſi affini-

Tab. XX. fig. 2.

affinitas inter formulas ſtabilitatem exhibentes pro figuris planis et ſolidis attentius inſpiciatur. Erit igitur triangulum $ACa = BCb$, et cum vtrumque ſit minimum punctum C ſitum erit in medio rectae AB. Cum iam pars ſubmerſa ſit $aFB = AFB - ACa + BCb$, momenta virium aquae his partibus reſpondentia reſpectu centri grauitatis g, ſe mutuo deſtruere debent. Per O ad ſectionem aquae $\overline{ab}$ ducatur normalis TOV, in quam pariter ex g horizontalis gV normaliter cadet. His praemiſſis partis AFB momentum reſpectu g erit $= AFB.gV$; quoniam O eſt centrum magnitudinis partis AFB. Deinde trianguli ACa area eſt $= \frac{AC \cdot aC . w}{2} = \frac{w \cdot AC^2}{2}$; eiusque centrum grauitatis erit in P vt ſit $Cp = \frac{2}{3} AC$ momentum igitur hinc ortum eſt $\frac{w \cdot AC^2}{2} (\frac{2}{3} AC + CT + gV)$; pari autem ratione momentum ex area BCb ortum eſt negatiuum atque $= \frac{w \cdot AC^2}{2} (\frac{2}{3} AC - CT - gV)$ poſito AC pro BC. Momentum igitur totale ex area aFb ortum erit $AFB.gV - \frac{2w \cdot AC^3}{3}$, quod cum aequilibrium adeſſe debeat, erit $= 0$. Transferantur iam haec ad corpora, atque in ſectione aquae corporis per eius centrum grauitatis ducta ſit recta ad planum OGg normalis, quae erit axis circa quem corpus inclinabitur; atque ad hunc axem in ſectione aquae colligantur vtrinque ſummae cuborum applicatarum orthogonalium, ſeu $\int (y^3 + z^3) dx$ ex prop. 29. quae quantitas, quam vocabo Q, ſubſtitui debet loco $2 AC^3$. At loco area AFB ſcribendum erit volumen partis ſubmerſae quod ſit $= V$. Ex his pro corpore ſeu vaſe quocunque, cuius centrum grauitatis G horizontaliter in g transfertur, habebitur ad inclinationem inde ortam definiendam haec ae-

quatio $3g\,V.V = w\,Q$. Eſt vero ob angulos ad O et g minimos $g\,V = Gg - w\,GO$; quare cum ſit $3\,V.Gg = 3\,w\,V.GO + w\,Q$, erit ſinus anguli, quo vas circa axem horizontalem ad planum $O\,G\,g$ normalem inclinabitur, ſcilicet $w = \frac{3V.Gg}{3V.GO+Q}$. Ad ſtabilitatem autem inueniendam interuallum, figura tantum plana conſiderata, centri grauitatis areae $a\,F\,b$ a recta horizontali $g\,V$ eſt inueſtigandum, quod reperitur $= OV - \frac{AC^3\,w^2}{3\,AFB}$ ob $P\,p = Q\,q\, \frac{1}{3}\, w . AC$ idemque interuallum pro corpore ſolido erit conſequenter $= OV - \frac{w^2 Q}{6V}$. Eſt autem $OV = OG + w.Gg - \frac{w^2.OG}{2}$; vnde diſtantia centri magnitudinis partis ſubmerſae et centri grauitatis poſt inclinationem erit $= OG + w.Gg - \frac{w^2\,OG}{2} - \frac{w^2.Q}{6V} = OG + w.Gg \frac{w^2 F}{2M}$, denotante M pondus corporis, et F ſtabilitatem eiusdem ante inclinationem; eſt enim $F = M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$. Quare poſt inclinationem erit firmitas $= M\left(OG + w.Gg - \frac{w^2.F}{2M} + \frac{Q}{3V}\right) = F + w\,M.Gg - \frac{w^2 F}{2}$. reſpectu eius axis ſcilicet circa quem inclinatio eſt facta. Q. E. I.

Coroll. 1.

409. Cum, antequam centrum grauitatis de ſuo loco depellitur, ſtabilitas aequilibrii ſitus reſpectu axis horizontalis ad planum OGg normalis ſit $= M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$; ſi haec ſtabilitas dicatur $= F$, erit ſinus anguli inclinationis, qui ex translatione centri grauitatis G in g gignitur, $w = \frac{M.Gg}{F}$; exiſtente ſinu toto $= 1$.

Coroll.

Coroll. 2.

410. Sinus anguli ergo, quo vas circa axem horizontalem plano OGg normalem inclinatur, dum centrum grauitatis G motu horizontali per ſpatium Gg promouetur, eſt directe vt hoc ſpatium Gg et pondus vaſis coniunctim, ac reciproce vt ſtabilitas vaſis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 3.

411. Quo maior ergo corporis eſt ſtabilitas, eo magis id etiam ei inclinatione reſiſtit, quae oritur a translatione onerum de loco alio in alium; quam ob cauſam etiam nauibus maxima ſtabilitas eſt concilianda.

Coroll. 4.

412. Quia ſtabilitas poſt factam inclinationem inuenta eſt $= F + wM.Gg - \frac{w^2 F}{2}$, atque eſt $w = \frac{M \cdot Gg}{F}$; erit illa ſtabilitas $= F + \frac{M^2\ Gg^2}{2F}$. Hoc igitur ſtabilitatis incrementum, quod poſt inclinationem accedit ob duas dimenſiones interualli quaſi infinite parui Gg omnino eſt negligendum.

Coroll. 5.

413. Quando ergo grauitatis centrum recta ſurſum deorſumue mouetur, nulla fit inclinatio ſed, ſola ſtabilitas immutatur; contra vero quando centrum grauitatis horizontaliter mouetur, ſtabilitas non afficitur, ſed ſitus aequilibrii per inclinationem ſolum mutatur.

Coroll. 6.

414. Quando ergo centrum grauitatis oblique mouetur, tum mutabitur tam ſtabilitas, quam ſitus corporis in

aqua.

aqua. Quanta autem mutatio in vtroque accidat, ex propoſitionibus praecedentibus ſatis intelligere licet.

Scholion 1.

415. Quo haec facilius ad naues, in quibus ſtabilitatem reſpectu duorum tantum axium horizontalium, alterius longitudinalis a prora ad puppim protenſi, alterius latitudinalis ad illum normalis, cognitam eſſe ponimus, accommodari queant, motus centri grauitatis, niſi vel ſecundum longitudinem vel latitudinem fiat, reſolui debet in duos laterales, alterum in longitudine alterum in latitudine factum, quos ſeorſim conſiderari oportet. Illa enim centri grauitatis translatio ſecundum axem longitudinalem facta inclinationem circa axem latitudinalem generabit, cuius ſinus aequalis erit facto ex pondere nauis in viam centri grauitatis ſecundum longitudinem, diuiſo per ſtabilitatem reſpectu axis latitudinalis. Via vero centri grauitatis ſecundum latitudinem facta per pondus nauis multiplicata, ac per ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis diuiſa exprimet ſinum anguli inclinationis, quo nauis circa axem longitudinalem inclinabitur. Hae igitur duae inclinationes coniunctae praebebunt inclinationem nauis a translatione centri grauitatis per ſpatium quodcunque horizontale facta, ortam. At ſi centrum grauitatis ſimul vel aſcendat vel deſcendat, ante decrementum vel augmentum ſtabilitatis eſt inueſtigandum, quam in inclinationem inquiratur. Stabilitas enim, a qua inclinatio pendet, non prima in computum eſt ducenda, ſed ea, quae ob aſcenſum vel deſcenſum centri grauitatis iam eſt vel minuta vel aucta.

Scholion

Scholion 2.

416. Solutio huius problematis, quanquam id corpora quaecunque aquae inſidentia ſpectabat, multo facilior et a corporum conſideratione libera eſt facta, quod expreſſiones ex figurae planae contemplatione ortas ad naturam corporum extenſorum accommodare licuit. Sequitur autem iſta figurarum planarum ad corpora translatio ex comparatione formularum, quas in capite praecedente pro ſtabilitate tum figurarum planarum, tum corporum quorumque inuenimus. Cum enim pro figura plana ſit ſtabilitas $= M\left(GO + \frac{2\,AC^3}{3\,AFB}\right)$, pro corpore autem ea reperta ſit $= M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$ vbi Q denotat aggregatum cuborum omnium applicatarum in ſectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis tranſeuntem et axi inclinationis parallelum normalium; V vero exhibet volumen partis ſubmerſae. Quoties igitur ad eiusmodi expreſſiones peruenitur, a figura plana ad ſolidam fiet translatio, ſi loco areae AFB ſub aqua verſantis ſcribatur V volumen partis corporis ſubmerſae, atque pro $2AC^3$ ponatur Q, ſeu, $\frac{1}{2}$ Q pro AC^3. Cum igitur iſtius modi problemata multo facilius figuras tantum planas conſiderando reſoluantur, huius comparationis beneficio ſolutiones eorundem problematum nullo negotio ſimul ad quaecunque corpora reduci poterunt; quod vti in iſto problemate eſt factum, ita in ſequente multisque aliis ſuccedet.

PROPOSITIO 42.
Problema.

Tab. XXI. fig. 1. 417. *Si vaſi ſeu naui cuicunque aquae inſidenti nouum onus imponatur, inuenire tum ſitus tum ſtabilitatis mutationem, quae ab hoc nouo onere orietur.*

Solutio.

Sit AB ſectio aquae, et AFB pars corporis aquae ſubmerſa, cuius centrum magnitudinis ſit in O, totius vero corporis centrum grauitatis in G. Nunc poſito totius corporis ſeu nauigii pondere $= M$ ſuperaddatur illi in loco quocunque pondus m: Ad mutationem igitur ab hoc nouo onere impoſito ortam indagandam, concipiatur id primo ipſi centro grauitatis G immiſſum. Cum nunc pondus corporis ſit auctum, maior corporis pars aquae immergetur, quam ante: Subſidat igitur centrum grauitatis recta deorſum, vt nunc ab fiat ſectio aquae atque aFb tanta ſit corporis portio, quantam pondus $M + m$ deſiderat. Sit ſectionis aquae area $= E$, atque volumen partis ſubmerſae AFB ſit $= V$: erit volumen partis $AabB$ de nouo immerſae $= E.\,HI$, ſi quidem vti pono onus m eſt vehementer paruum reſpectu M, quo inaequalitatem inter AB et ab conſiderasſe non ſit neceſſe: Erit ergo $M : m = V : E.\,HI$, vnde fit $HI = \frac{mV}{ME}$. Quamuis autem iam debita corporis pars ſub aqua verſetur, tamen iſte ſitus non erit aequilibrii, niſi huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis etiamnum in recta FH exiſtat. Manebit autem partis ſubmerſae centrum magnitudinis vt recta HF, ſi portionis $AabB$ centrum magnitudinis in eandem cadat, id quod euenit quan-

Digitized by Google

quando recta GO ſimul per centrum grauitatis ſectionis tranſeat; hoc ergo caſu quaeſitum iam conſtat, cum $a F b$ futurus ſit aequilibrii ſitus. At ponamus ſectionis aquae centrum grauitatis non in I cadere, ſed in alio puncto C exiſtere; atque portionis $AabB$ centrum magnitudinis cadet in Z punctum medium rectae $Cc = HI$; hoc igitur caſu ſitus $a F b$ aequilibrii proprietate non erit praeditus; ſed corpus inclinabitur circa axem ad planum CIG normalem, ita vt ſectio aquae futura ſit $\alpha\beta$ cum priore angulum conſtituens $ac\alpha$ cuius ſinus ſit $= w$; quem angulum ante quam pro corpore inueſtigemus, quaeremus pro figura plana AFB. Cum igitur nunc $\alpha\beta$ ſit horizontalis ad eam, per O ducatur verticalis Oo, cui ex G horizontalis GV in V occurrat; atque quia hoc ſitu aequilibrium adeſſe ponitur, conſiderabo partem ſubmerſam $\alpha F \beta$, quam ex his partibus $AFB + AabB - ac\alpha + bc\beta$ compoſitam eſſe conſiderari conueniet, quarum partium momenta reſpectu G ſe mutuo deſtruent. At eſt areae AFB momentum $= AFB.\, GV$ areae vero $AabB = AabB\,(GV - \alpha o + \alpha z) = AabB\,(GV - co - cz)$. Trianguli autem $ac\alpha$, cuius area eſt $= \frac{1}{2} w\, \alpha c \cdot ac = \frac{1}{2} w \cdot AC^2$; momentum, poſito eius centro grauitatis in P vt ſit $cp = \frac{2}{3} c\alpha = \frac{2}{3} CA$ erit $= \frac{1}{2} w\, AC^2\,(GV - \frac{2}{3} AC - co)$. Trianguli autem $bc\beta$ ſimili modo momentum erit $= \frac{1}{2} w \cdot AC^2\,(GV + \frac{2}{3} AC - co)$. Cum igitur ſit pars aquae ſubmerſa $= AFB + AabB - ac\alpha + bc\beta$, erit momentum totius partis ſubmerſae $= AFB\;\, GV + AabB\,(GV - co - cz) + \frac{2}{3} w \cdot AC^3 = 0$. Transferatur nunc haec formula ad corpora, ponendo loco AFB volumen partis ſubmerſae V; loco $AabB$

volu-

volumen $\frac{mV}{M}$; atque loco $2\,AC^3$ ſummam omnium cuborum applicatarum normalium in ſectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis ductum, qui axis normalis ſit ad planum CIG; haec vero ſumma, quae in probl. 29 erat $\int(y^2+z^2)\,dx$ hic nobis breuitatis cauſa vocetur Q. Quamobrem pro corpore hanc habebimus aequationem $V.GV+\frac{mV}{M}(GV-co-cz)+\frac{1}{3}wQ=0$; quae cum ſit $GV=w.GO$; $co=CI-w\,HO=CI-w.OI-\frac{wmV}{ME}$ atque $cz=w.cZ=\frac{wmV}{2ME}$; tranſibit in hanc $wV.GO+\frac{wmV.GO}{M}-\frac{mV.CI}{M}+\frac{wmV.OI}{M}+\frac{wm^2V^2}{2M^2E}+\frac{1}{3}wQ=0$; ex qua elicitur $w=\frac{mV.CI}{MV.GO+\frac{1}{3}MQ+mV.GI+\frac{m^2V^2}{2ME}}$. Si nunc ſtabilitas reſpectu eiusdem axis circa quem inclinatio eſt facta, quae eſt $=M.GO+\frac{MQ}{3V}$ vocetur F, erit $w=\frac{m.CI}{F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}}$ pro qua aequatione ob m pondus reſpectu M valde paruum tuto vti licebit hac $w=\frac{m.CI}{F+m.GI}$. Stabilitas autem huius aequilibrii ſitus ab eo non differet, quae in ſitum aFb competeret; quae ob centrum magnitudinis ſupra O eleuatum interuallo $\frac{m}{M+m}(OI+\frac{mV}{2ME})$ erit $=(M+m)(GO+\frac{m}{(M+m)}(OI+\frac{mV}{2ME})+\frac{MQ}{3(M+m)V})=M.GO+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}+\frac{MQ}{3V}$ Cum igitur ante acceſſionem oneris m ſtabilitas eſſet $F=M.GO+\frac{MQ}{3V}$; erit nunc ſtabilitas $=F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}$, pro qua expreſſione pariter licebit vti hac $F+m.GI$. Quoniam autem hic onus m non ipſi centro grauitatis G immiſſum conſiderauimus, remoueatur nunc

nunc onus m in eum locum vbi reuera eſt poſitum, atque quaenam nouae mutationes eueniant, ex propoſitione praeced. intelligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

418. Cum $F + m.GI + \frac{m^2V}{2ME}$ ſit ſtabilitas noui aequilibrii ſitus, quem nauis onere m in centro grauitatis collocato adipiſcitur, ſinus anguli inclinationis aequabitur facto ex onere impoſito m ducto in CI et diuiſo per hanc nouam ſtabilitatem.

Coroll. 2.

419. Eadem inclinatio prodit ſi onus m vbicunque in recta verticali FH collocetur, quia motu oneris ſurſum deorſumue facto ſitus aequilibrii non turbatur; at ſtabilitas minor maiorue euadet.

Coroll. 3.

420. Si onus m in rectae verticalis FI puncto K imponatur, ſtabilitas ea quae prodiret, ſi centro grauitatis G foret immiſſum, diminui debet facto $m.GK$. Hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= F + m.IK + \frac{m^2V}{2ME}$.

Coroll. 4.

421 Reiecto ergo termino $\frac{m^2V}{2ME}$ perſpicuum eſt impoſitione oneris noui ſtabilitatem augeri, ſi onus infra ſectionem aquae collocetur. Contra vero ſtabilitas diminuetur, ſi onus ſupra aquam ponatur.

Digitized by Google

Coroll. 5.

422. Quando ergo centrum grauitatis ſectionis aquae C in ipſam verticalem FGI incidet, tum nulla fiet inclinatio, ab onere impoſito, dummodo oneris centrum grauitatis quoque in rectam FGI incidat.

Coroll. 6.

423. Si autem onus m non in rectam FI ponitur ſed extra eam, atque punctum C non incidat in I, duplex proueniet inclinatio, altera ſcilicet hic definita et ab interuallo CI pendens, altera vero ex praecedente propoſitione orta et a diſtantia oneris a recta FI pendens.

Scholion. 1.

424. Ex hac ergo propoſitione clarius intelligitur quantum eiusmodi nauigia, quae ſectionis aquae centrum grauitatis et partis ſubmerſae centrum magnitudinis in eadem recta verticali, in quam ſimul totius nauis centrum grauitatis cadere debet, habeant poſita aliis, quae hac proprietate carent, antecellant. In eiusmodi enim nauibus, ſi noua onera, vel ipſi centro grauitatis immittantur, vel in recta verticali per id tranſeunte collocentur, nulla accidit inclinatio, ſed nauis tantum verticaliter deſcendendo aquae profundius immergetur. Atque etiam ſi onus nouum non in rectam verticalem per centrum grauitatis ductam imponatur, vnica tantum oritur inclinatio circa axem quendam horizontalem, cum in aliis nauigiis, in quibus haec proprietas locum non inuenit, duplex inclinatio eueniat. Quo autem, ſi nauis profundius immergitur,

gitur, recta verticalis per centrum grauitatis ducta etiamnum per nouae ſectionis aquae centrum grauitatis trenſeat, neceſſe eſt vt ſectiones nauis parallelae ſectioni aquae principali, ſi non omnes, tamen proximae ſaltem ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant poſita. At ſi omnes ſectiones nauis horizontales vel eae ſaltem, quae aquae immerguntur, ita ſint comparatae, vt earum centra grauitatis ſita ſint in eadem recta verticali, tum ſponte in eandem rectam cadet centrum magnitudinis partis ſubmerſae. Quamobrem iſta regula, quae praecipit, vt vna recta verticalis per ſingularum ſectionum horizontalium centra grauitatis tranſeat, ingentem afferet vtilitatem ad naues aptiſſime conſtruendas; hac enim obſeruata pluribus ſatisfit requiſitis, quae in perfecta naui ineſſe debent; prout ex antecedentibus intelligere licet, et in ſequentibus fuſius docebitur.

Scholion 2.

425. Quae in hac propoſitione de impoſitione noui oneris ſunt dicta, eadem quoque locum habent, ſi naui potentia verticalis applicetur, ſi enim potentia verticalis deorſum vrgeat, tum idem orietur effectus ac ſi onus nouum, cuius pondus illi potentiae aequiualeat, in eo ipſo loco, in quo potentia applicatur, imponeretur: ſin autem potentia ſurſum trahat, tum effectus erit contrarius, atque ex ſolutione problematis non difficilius determinabitur, ponendo oneris vim negatiuam, ſeu loco m ſcribendo $-m$. In hoc vero diſcrimen inter onera et potentias conſiſtet, quod impoſitione onerum tum vis inertiae nauis tum etiam eius momentum immutetur, atque inſuper centrum grauitatis de ſuo loco transferatur,

quae

quae omnia, ſi merae potentiae agant, nulli mutationi ſunt abnoxia. Quamobrem oportebit effectum huiusmodi potentiarum ſeorſim ſcrutari, quatenus ſcilicet applicatione potentiarum nulla naui noua materia accedit; id quod mox in hoc capite, quod effectui quarumcunque potentiarum naues ſollicitantium determinando eſt deſtinatum. Quae tractatio, quo dilucidius perſpiciatur, ante omnia eſt aduertendum omnem effectum, qui a potentiis nauigia aliaue corpora aquae innatantia ſollicitantibus, quintuplicem eſſe poſſe; cum huiusmodi corporum ſtatus quinque diuerſis modis turbari queat. Primum enim nauis vel corpus aquae inſidens a vi aliena ita affici poteſt, vt vel profundius immergatur, vel ex aqua extrahatur; qui effectus a potentiis verticalibus oritur, atque ex propoſitione praeſente facile iudicatur. Secundus potentiarum effectus in hoc conſtat, vt nauis de ſuo loco motu horizontali propellatur, ad quem obtinendum remi, venti ipſe aquae motus aliaeque vires adhiberi ſolent. Tertio nauis a potentiis inclinatur circa axem quempiam horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem, qui ad planum verticale per ſpinam ductum ſit normalis. Quarto inclinatio fieri poteſt circa axem horizontalem ſecundum nauis longitudinem per centrum grauitatis ductum; ad duplicem enim hanc inclinationem omnis inclinatio, quae circa axem quemcunque fit, reduci poteſt. Quinto denique nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem conuerti poteſt, talemque effectum in nauibus gubernaculum praecipue producit. Hi autem quinque effectus, quanquam inter ſe ita ſunt connexi vt plerumque plures ab

vna

Digitized by Google

vna potentia oriantur, tamen ſinguli ſeparatim conſiderari calculoque elici poſſunt; quemadmodum ex principiis ante traditis intelligere licet. Vnusquisque enim effectus perinde producitur a potentiis atque determinatur, ſiue reliqui effectus ſimul producantur ſiue ſecus; et hancobrem ſi quaecunque potentiae nauigium ſollicitent, totalis effectus cognoſcetur, ſi ſeparatim, quantum in ſingulis memoratis quinque effectuum ſpeciebus efficiatur, diligenter inueſtigetur. Quo circa vnumquemque de his quinque effectibus ſeorſim contemplabor, ac quomodo ſinguli a potentiis ſollicitantibus producantur, animum a reliquis abſtrahendo, oſtendam. Ante omnia autem ſi propoſita fuerit potentia navem corpusue quodcunque aquae innatans ſollicitans, inquirendum eſt, vtrum ea eiusmodi effectum, de quo quaeritur, producere valeat, an minus; non enim quaevis potentia ad quemuis effectum producendum eſt apta. Deinde ſi compertum fuerit potentiam eiusmodi effectum exerere, tum quantitas iſtius effectus determinari debebit. Hocque modo cum ſingulae quinque effectuum ſpecies memoratae erunt pertractatae, facile erit iudicare, quid potentiae quaecunque in data naui ſint effecturae.

PROPOSITIO 43.

Problema.

426. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum, quem exerent in naui magis minusue aquae immergenda.*

Solutio.

Ad diiudicandum, quanto magis minusue nauis a potentiis immergatur, ad eius centrum grauitatis reſpici

oportet, et inueſtigari, vtrum id a potentiis deorſum vel ſurſum vrgeatur, an ſecus. Quamobrem, ſicut ad motum centri grauitatis cognoſcendum facere oportet, omnes potentiae in directionibus ſibi parallelis ipſi centro grauitatis applicatae concipi debebunt; ſingulaeque reſolui in verticales et horizontales, quarum illae ſolae eum effectum producent, in quem hic inquirimus. Si igitur fuerit quaecunque potentia p cuius directio cum horizonte angulum faciat, cuius ſinus ſit m, poſito ſinu toto $= 1$; erit mp ea potentia, qua nauis ſurſum deorſumue vrgebitur; ſurſum ſcilicet ſollicitabit nauem, ſi directio potentiae ſurſum vergat, deorſum vero ſi deorſum. Quare ſi ex ſingulis potentiis ſollicitantibus valores $\overline{m\,p}$ eliciantur, et in vnum colligantur, habebitur totalis vis nauem vel ſurſum eleuans vel deorſum deprimens. Aequiualeat iſta vis collecta ponderi P, tendatque deorſum; ſi enim ſurſum agat, tantum valorem P negatiuum accipere oportebit. Ab hac ergo vi P, ſi quidem P affirmatiuum habuerit valorem, nauis magis immergetur; quanto profundius autem immergatur ita definietur. Sit maſſa ſeu pondus totius nauis $= M$; volumen partis ſubmerſae $= V$, et ſectio aquae $= E$, ponatur vero altitudo verticalis, qua nauis aquae profundius immergetur $= Z$, quam pono vehementer exiguam, quod vires verticales ſeu pondus P plerumque valde exiguum reſpectu ponderis nauis M eſſe ſoleat. Erit ergo poſt auctam nauis immerſionem volumen partis ſubmerſae $= V + Ez$, hincque naſcetur per principia hydroſtatica iſta proportio $M : V = M + P : V + Ez$, ſeu iſta aequatio $PV = MEz$, ex qua oritur $z = \frac{PV}{ME}$. Profundius

fundius itaque centrum grauitatis nauis ſubſidet, a vi P, et deſcendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$. At ſi potentiae ſollicitantes nauem eleuent, atque totalis vis eleuans aequiualeat ponderi P, tum centrum grauitatis aſcendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$, ſeu quod idem eſt, deſcendet per interuallum $-\frac{PV}{ME}$, quae expreſſio ex illa naſcitur ponendo $-P$ loco P, vti iam innuimus. Q. E. I.

Coroll. 1.

427. Si ergo omnes potentiae ſollicitantes directiones habeant horizontales, vel ſi potentiae verticales quae ex illis oriuntur ſe mutuo deſtruant, tum nauis neque magis deprimetur in aquam, neque eleuabitur.

Coroll. 2.

428. Si plures potentiae nauem ſollicitent, tum ex ſingulis aſcenſum deſcenſumue centri grauitatis concludere licebit, quippe qui ſinguli effectus collecti verum centri grauitatis ſiue aſcenſum ſiue deſcenſum indicabunt.

Coroll. 3.

429. Quia centri grauitatis aſcenſus deſcenſusue fit per ſpatium $\frac{PV}{ME}$; at vero volumen partis ſubmerſae V ſemper ſit proportionale ponderi nauis M, ſequitur maiorem minoremue nauis immerſionem proportionalem eſſe vi vrgenti P directe, et ſectioni aquae E inuerſe.

Coroll. 4.

430. Quo ergo maior fuerit ſectio aquae, eo minor erit mutatio partis aquae immerſae ab eadem vi ſol-

Digitized by Google

licitante orta. Quamobrem quo naues eiusmodi mutationi minime ſint obnoxiae, ſectionem aquae ampliſſimam efficere expediet.

Coroll. 5.

431. Si aquae volumen, cuius pondus aequale ſit ponderi P, ponatur u, atque hoc volumen adhibeatur ad quantitatem vis ſollicitantis exprimendam, erit ob V: M $= u$: P ſpatium, quo centrum grauitatis ſurſum deorſumve vrgetur $= \frac{u}{E}$; ex qua expreſſione facillime, quanto nauis magis minusue aquae immergatur, intelligi poteſt.

Scholion.

432. Ad effectum in omni corpore, quem potentiae ſollicitantes producunt, cognoſcendum duplici inueſtigatione eſt opus, altera qua motus progreſſiuus centri grauitatis definitur, altera qua motus corporis gyratorius circa centrum grauitatis quaeritur. Eandem ergo rationem in effectu potentiarum nauigia aliaue corpora aquae innatantia ſollicitantium inquirendo adhiberi oportet, quae cum natura aquae, qua libertas corporum ſeſe quacunque mouendi reſtringitur, coniungi debet. Quod enim primum ad motum centri grauitatis attinet, eum in corporibus aquae innatantibus duplicem conſiderari conuenit, prout eius directio vel horizontalis eſt vel verticalis; motus namque horizontalis ſi ſemel fuerit impreſſus, perpetuo conſeruatur, niſi quatenus ab aquae reſiſtentia retardatur, motus verticalis autem ſtatim ſiſtitur, ac tanta pars ſub aqua verſatur, quantam hic definiuimus; atque hancobrem in iſta propoſitione non tam ipſum centri grauitatis aſcenſum deſcenſumue determinare ſuſcepimus, quam terminum illum

Digitized by Google

illum quo ſiſtitur, et in quo centrum grauitatis acquieſcit. Quanquam enim reuera grauitatis centrum, cum moueri incepit, ſubito non quieſcit, tamen eiusmodi motu oſcillatorio definiendo ſuperſedendum cenſuimus, cum ab ipſa aqua ſtatim ſiſtatur. Pergo igitur ad alterum caſum motus centri grauitatis progreſſiui inueſtigandum, quo a potentiis ſollicitantibus motum in directione horizontali adpiſcitur.

PROPOSITIO 44.

Problema.

433. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum in motu horizontali progreſſiuo vel generando vel alterando.*

Solutio.

Quoniam de motu centri grauitatis progreſſiuo quaestio eſt, omnes potentiae in directionibus parallelis ipſi centro grauitatis applicatae concipi debent: et quoniam motus tantum horizontalis inueſtigatur, omnes potentiae reſoluendae ſunt in verticales et horizontales, quae poſteriores tantum huic inſtituto ſunt accommodatae. Si igitur quaecunque potentia fuerit p, cuius directio cum horizonte faciat angulum cuius ſinus ſit m, erit $p\sqrt{(1-mm)}$ potentia horizontalis effectum hic quaeſitum producens. Omnium ergo potentiarum ſollicitantium quaerantur hoc modo vires horizontales, earumque, ſi in ipſo centro grauitatis ſint applicatae, tum media directio tum potentia aequiualens, quae exprimatur pondere P. Iam ſit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta, Tab. XXI. fig. 2.

 aque

atque GP ſit media directio omnium potentiarum ſollicitantium, quatenus motum horizontalem afficiunt. Sollicitabitur ergo nauis in directione GP a potentia P, cuius vis aequiualeat ponderi P. Si nunc pondus totius nauis ponatur $= M$, erit vis accelerans $= \frac{P}{M}$, qua in directione GP accelerabitur. Scilicet ſi nauis iam moueatur in directione GP celeritate debita altitudini v, erit, dum nauis elementum ſpatii dx abſoluet, $dv = \frac{Pdx}{M}$. At ſi motus, quem nauis iam habet non fiat in directione GP, ſed in alia GM, quae cum GP angulum faciat MGP, cuius ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$ poſito ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$; tum a vi ſollicitante P cum celeritas nauis, quae debita ſit altitudini v mutabitur, tum ipſa directio MG. Celeritas autem augebitur a vi $\frac{nP}{M}$ ita vt dum nauis elementum dx percurrit, futurum ſit $dv = \frac{nPdx}{M}$. A vi autem altera normali $\frac{mP}{M}$ cogetur nauis a ſemita rectilinea GM deflectere verſus directionem GP, ac dum percurret ſpatiolum dx, declinabit a directione GM verſus GP angulo, cuius ſinus erit $= \frac{mPdx}{2Mv}$. Atque ex his tam generatio quam alteratio motus nauium progreſſiui a potentiis quibuscunque orta, cognoſcitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

434. Si ergo nauis quieuerit, a potentiis ſollicitantibus motum conſequetur in ipſa directione media GP; eoque celerius moueri incipiet, quo maior fuerit vis P, ſimulque quo minus fuerit pondus ipſius nauis M.

Co-

Coroll. 2.

435. Simili modo ſi nauis iam habeat motum in ipſa directione GP, is accelerabitur eo fortius, quo maior fuerit potentia P, et quo minus fuerit pondus nauis M. Momentum enim accelerationis eſt directe vt vis P, et reciproce vt pondus nauis.

Coroll. 3.

436. Sin autem motus, quem nauis iam habet, fiat in alia directione GM, tum acceleratio eo erit maior, quo minor fuerit angulus MGP; proportionalis enim eſt ceteris paribus coſinui anguli MGP.

Coroll. 4.

437. Quod autem in hoc caſu ad declinationem a directione GM attinet, ea proportionalis erit directe ipſi potentiae P et ſinui anguli MGP coniunctim, inuerſe vero ponderi nauis et quadrato celeritatis coniunctim.

Coroll. 5.

438. Quo celerius igitur nauis iam mouetur, eo minus ab eadem vi oblique agente de via ſua deflectitur; atque ceteris paribus erit deflexio in reciproca ratione duplicata celeritatis.

Scholion.

439. Haec omnia non ſolum ita ſe habent, ſed etiam totus nauis motus ad datum quoduis tempus ex iis poſſet definiri, ſi modo aqua nullam opponeret reſiſtentiam, neque tam ipſum motum retardaret, nec effectum poten-

potentiarum turbaret. Propter aquae reſiſtentiam enim primum motus nauium inſigniter retardatur, idque eo magis quo celerius nauis mouetur; aeſtimatur namque experientiam conſulendo aquae reſiſtentia quadrato celeritatis proportionalis. Deinde vero directio reſiſtentiae praecipue eſt attendenda, quae niſi in ipſam motus nauis directionem incidat, ſimul etiam eius directionem afficit, atque navem de via ſua deflectit. Quamuis autem in ſequente demum capite effectum reſiſtentiae ſimus indagaturi, tamen inter potentias locum habet, et cum eius quantitas et directio fuerit definita, ipſe effectus ex his ipſis principiis determinari debet. Quamobrem ſi nauis iam habeat motum, cum potentiis ſollicitantibus ſimul reſiſtentia eſt coniungenda, et effectus, quem exerit tam in motu nauis afficiendo, quam nauem inclinando et conuertendo ex hoc capite erit deriuandus. Sic in hac propoſitione PM exprimere poterit mediam directionem non ſolum potentiarum ſollicitantium ſed etiam reſiſtentiae ab aqua ortae; atque P denotare vim coniunctim ex potentiis ſollicitantibus et reſiſtentia natam. Quare cognitis reſiſtentiae cum quantitate tum directione, ex hac propoſitione nauis celeritas et directio quouis loco, dum promouetur, exquiſite definiri poterit.

PROPOSITIO 45.
Problema.

440. *Si nauis a potentiis quibuscunque ſit ſollicitata, inuenire momenta virium nauem tum circa axem horizontalem longitudinalem tum latitudinalem inclinantium.*

Solu-

Solutio.

Sit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta, in qua extat AB axis longitudinalis, CD vero axis latitudinalis, circa quorum axium vtrumque, quanta vi data potentia nauem inclinet, hic inueſtigari oportet. Intelligitur autem pro vtroque axe ſimile ratiocinium eſſe inſtituendum, ſimilique modo vim nauem tam circa axem AB, quam circa CD inclinantem eſſe indagandam; quamobrem ſufficiet pro alterutro tantum axe puta AB quaeſtionem abſoluiſſe. Primo autem notandum eſt, nullam potentiam, cuius directio vel cum axe AB concurrat vel eidem ſit parallela vel tantum cum hoc axe in eodem plano ſit ſita, nauem circa hunc axem conuertere poſſe. Quamobrem eae tantum potentiae hic ſunt conſiderandae, quarum directiones cum axe AB non in eodem plano ſint poſitae. Sit igitur quaecunque potentia nauem ſollicitans aequiualens ponderi p, per cuius directionis punctum quoduis ad axem AB ducatur perpendicularis, cuius longitudo ſit f; deinde concipiatur planum per axem AB, et hanc perpendicularem ductum, et quaeratur angulus, quem directio potentiae cum hoc plano conſtituit, cuius ſinus ſit $= m$. Quo facto momentum potentiae ad nauem circa axem AB conuertendam erit $= mpf$. Simili modo quaerantur eiusmodi momenta ex ſingulis potentiis ſollicitantibus, et omnes, reſpectu habito ad ipſam actionem, vtrum in eandem plagam, an in contrariam nauem conuertere conentur, in vnum colligantur, quae reducentur ad eiusmodi ſimplicem expreſſionem Pa, in qua P pondus quodpiam, a vero rectam Tab. XXI. fig. 3.

quan-

quandam denotabit. Hoc igitur modo quotcunque potentiae nauem ſollicitauerint, momenta reſpectu tam axis A B quam axis CD definientur. Q. E. I.

Coroll. 1.

441. Quia indifferens eſt quodnam punctum in directione potentiae ſollicitantis accipiatur, poterit planum quodpiam per axem ductum pro lubitu accipi, idque punctum notari, in quo directio potentiae illi plano occurrit.

Coroll. 2.

442. Expediet ergo ad hoc commodiſſime tranſigendum planum accipere vel verticale vel horizontale, per axem, circa quem momentum conuertens inquiritur, ductum. Saepius autem horum planorum alterum alteri erit anteferendum; quae electio facillime cuique patefiet.

Coroll. 3.

443. Perſpicitur ergo, ſi cuiuſpiam potentiae directio vel per ipſum centrum grauitatis G tranſeat, vel in plano ACBD ſita ſit, tum nauem circa neutrum axem conuerſum iri, neque propterea vllam inclinationem pati.

Scholion.

444. Cum circa quemcunque axem inclinatio duplex ſit, pro duplici plaga ſecundum quam inclinatio fieri poteſt, hoc in inquiſitione momentorum diligenter eſt attendendum, quo omnibus momentis definitis appareat, an omnino in eandem plagam nauem conuertere conentur,

an

Digitized by Google

an ſecus: illo enim caſu omnia momenta in vnam ſummam colliguntur, hoc vero ea momenta, quae in plagam oppoſitam tendant, ſubtrahi debent. Quo autem facilius hoc diſcrimen oculis obuerſetur, atque citiſſime animadnertatur, pro vtroque axe ambas plagas probe inter ſe dignouiſſe, et idoneis nominibus appellaſſe iuuabit. Ita nauis circa axem latitudinalem CD duplici modo inclinari poteſt, vel proram vel puppim verſus, inclinatur autem verſus proram vel puppim, dum vel prora vel puppis magis immergitur. Circa axem longitudinalem AB autem inclinatio fit vel ad latus dextrum vel ſiniſtrum, quae denominatio deſumitur ab eo, qui in puppi ſtans proram aſpicit. In colligendis igitur momentis plurium potentiarum reſpectu axis vel AB vel CD, probe eſt notandum in vtram plagam quaeque potentia conetur inclinare nauem, quo collectio fiat legitima. Inuento autem momento totali ex omnibus potentiis ſollicitantibus collecto, ipſa inclinatio eſt definienda, id quod ſequente propoſitione praeſtabitur.

PROPOSITIO 46.

Problema.

445. *Si nauis a potentiis quibuscunque ſollicitetur, determinare angulum, quo ea tum circa axem latitudinalem tum longitudinalem inclinetur.* Tab. XXI. fig. 3.

Solutio.

Conſideremus primo axem latitudinalem CD, ſitque momentum ex omnibus potentiis ortum ad nauem circa hunc axem CD ſiue proram ſiue puppim verſus inclinandam

 dam

dam $= Pa$; atque anguli inclinationis, quem producit, ſinus ſit $= w$, quem tanquam vehementer paruum ſpecto Sit iam ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis latitudinalis $CD = F$, eo modo expreſſa, quo in capite praecedente fecimus, erit Fw momentum, quo nauis ſeſe proprio conatu in ſitum erectum reſtituere annititur. Cum igitur hunc ſitum a potentiis ſollicitantibus conſeruari ponamus, neceſſe eſt vt ſit $Pa = Fw$, ex qua aequatione oritur anguli inclinationis productae ſinus $w = \frac{Pa}{F}$. Simili modo, ſi dicatur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = \Phi$, atque momentum totale potentiarum nauem circa hunc axem inclinare tendentium fuerit $= Qb$, erit anguli ad quem nauis actu circa axem AB inclinabitur ſinus $= \frac{Qb}{\Phi}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

446. Conſtat igitur, quod quidem ex praecedentibus iam manifeſtum eſt, inclinationem, quam data potentia producit, eo fore minorem, quo maior fuerit ſtabilitas nauis reſpectu axis, circa quem fit inclinatio.

Coroll 2.

447. Stabilitas noſtro recepto modo deſignatur per factum ex pondere nauis in lineam quandam rectam: vnde facile intelligitur fractionem $\frac{Pa}{F}$ denotare merum numerum, qui exprimet ſinum anguli inclinationis poſito ſinu toto $= 1$.

Coroll. 3.

448. Erit ergo ſinus anguli inclinationis ad ſinum totum, vti momentum potentiarum inclinationem efficientium, ad ſtabilitatem nauis reſpectu illius axis circa quem fit inclinatio.

Coroll. 4.

449. Si igitur ſtabilitas nauis reſpectu cuiuspiam axis decies maior fuerit, quam momentum virium inclinantium, tum inclinatio minor erit 6 gradibus, prodit enim hoc caſu angulus inclinationis circiter $5°, 45'$.

Coroll. 5.

450. Intelligitur etiam, quo magis vires inclinantes a centro grauitatis fuerint remotae, eo maius fore momentum ad inclinandum, et propterea inde eo maiorem produci inclinationem.

Scholion.

451. Quemadmodum a potentiis centrum grauitatis ſollicitantibus in nauigiis duplex naſcitur effectus, quorum alter in maiore vel minore immerſione conſiſtit, alter vero in promotione nauis horizontali, ita ex potentiis, quae corpora circa centrum grauitatis gyrari ſolent, in nauibus triplex effectus oritur, pro tribus axibus, circa quos nauis conuerti poteſt. Si enim in omni naui tres axes per centrum grauitatis tranſeuntes concipiamus, duos horizontales, alterum longitudinalem ſcilicet, alterum latitudinalem, et vnum verticalem, nauis a potentiis circa ſingulos conuerti poterit, ita vt conuerſio circa vnum

non turbet conuerſionem circa reliquos. Effectus autem harum conuerſionum circa tres iſtos axes propter actionem aquae inter ſe penitus ſunt diſſimiles, et hancobrem ſeorſim ſunt euoluendi. Vires enim, quae tendunt ad nauem circa alterutrum axem horizontalem conuertendam, effectum ſuum ſtatim conſequuntur, qui cum ſemel fuerit productus, nulla amplius mutatio in naui oritur. Conſiſtit enim harum virium effectus in inclinatione circa eiusmodi axem ad certum angulum vsque, quoad iſtae vires a ſtabilitate nauis in aequilibrio conſeruentur; atque ſi inclinatio fuerit facta ad hunc angulum, tum nauis in hoc ſtatu perſiſtit, ſi quidem vires eaedem maneant; at quam primum vires vel augentur vel diminuuntur vel penitus ceſſant, tum inclinatio vel augebitur vel diminuetur vel nauis prorſus ſe in ſitum naturalem recipit, niſi forte ob motum iam receptum motus oſcillatorio ſimilis producatur. Longe aliter autem eſt comparata ratio conuerſionis circa axem verticalem, viribus enim quae eiusmodi conuerſionem producunt, nulla vis propria reſiſtit, et hancobrem nauis a talibus viribus circa axem verticalem tamdiu conuertitur, quamdiu vires agunt, neque conuerſio ante ſiſtitur, quam vires penitus ceſſauerint, atque motus conuerſionis iam conceptus a reſiſtentia aquae abſorbeatur. Quocirca ad effectum eiusmodi virium conuertentium cognoſcendum ipſum motum conuerſionis indagari oportet.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. XXI. fig. 5. 452. *Si navis vel corpus quodcunque aquae innatans ſollicitetur a potentiis quibusuis, determinare vis momentum, quo*

quo corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem circumagetur.

Solutio.

Sit ACBD ſectio horizontalis nauis per centrum grauitatis G facta, atque EGF axis verticalis per centrum grauitatis G ductus, circa quem motus conuerſionis inquiritur. Duplici autem modo nauis circa hunc axem gyrari poteſt, conuertendo ſe vel ad dextram vel ad ſiniſtram; dico autem nauem ſe ad dextram conuertere, quando prora ei, qui in puppi ſtat proramque intuetur, ad dextram rotari videtur; cui conuerſioni contrarius motus ad ſiniſtram fieri dicitur, de qualibet igitur potentia nauem circa hunc axem verticalem circumagere valente videndum eſt, vtrum ea nauem verſus dextram an verſus ſiniſtram rotari cogat, quo, ſi plures agant potentiae effectus conſpirantium addi, contrariarum vero ſubtrahi facillime queant. Animaduertendum autem eſt ante omnia, nullam potentiam, cuius directio vel tranſeat per centrum grauitatis, vel ſit verticalis, vel cum axe EF in eodem plano conſiſtat, eiusmodi motum conuerſionis producere valere. Cum igitur omnes potentiae reſoluantur in verticales et horizontales, in ſolis horizontalibus cauſa eiusmodi conuerſionis circa axem EF erit quaerenda. Ita autem ipſa vis conuertens inueſtigabitur: Concipiatur planum horizontale in quo ſita ſit directio potentiae cuiuspiam horizontalis, noteturque punctum in quo axis EF ab hoc plano ſecabitur. Deinde ex hoc puncto in directionem potentiae ducatur normalis, quae per ipſam potentiam multiplicata dabit momentum eius vis ad motum gyratorium circa axem

EF

Digitized by Google

EF producendum. Vel ex ſupra dicto axis EF puncto recta quaecunque duci poteſt ad directionem potentiae ſollicitantis horizontalis, haecque recta tum in ſinum anguli quem cum directione potentiae conſtituit, tum in ipſam potentiam ducta dabit momentum. Si igitur ex ſingulis potentiis ſollicitantibus horizontalibus iſtiusmodi momenta eliciantur, eaque, ratione habita, vtrum omnia ad eundem effectum producendum conſpirent, an quaedam ſint contraria, in vnam ſummam colligantur, prodibit eiusmodi expreſſio Pa, factum ſcilicet ex pondere quodam in quampiam rectam datam, quod factum exhibebit totale virium momentum, quo motus conuerſionis circa axem EF generabitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

453. Omnes igitur potentiae horizontales exceptis iis, quarum directiones tranſeunt per axem conuerſionis EF, tendent ad nauem circa hunc axem conuertendam, atque actu conuertent, niſi plures eiusmodi potentiae ſe mutuo deſtruant.

Coroll. 2.

454. Quaecunque igitur potentia horizontalis eo maiorem habebit vim ad nauem circa axem verticalem circumagendam, quo maior fuerit tum ipſa vis, tum eius diſtantia ab axe conuerſionis EF, quae diſtantia menſuratur recta horizontali tam ad axem, quam ad directionem potentiae normali.

Coroll. 3.

455. Cum autem nauis quoque a potentiis horizontalibus propellatur, iisdem potentiis, quibus nauis promovetur

vetur, nauis etiam circa axem verticalem conuertetur, niſi media directio omnium per ipſum axem tranſeat.

Coroll. 4.

456. Ne igitur, quae potentiae nauem promouent, eaedem nauem declinent ſeu circa axem verticalem conuertant, neceſſe eſt vt aut ſingularum potentiarum ſollicitantium directiones, aut ſaltem earum media directio per verticalem e centro grauitatis eductam tranſeat.

Scholion.

457. In nauibus iſte motus conuerſionis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem maximi eſt momenti, eique producendo, quoties opus eſt, gubernaculum eſt deſtinatum, cuius ope nauis ſi in motu fuerit conſtituta, tum ad dextram tum ad ſiniſtram poteſt deflecti. Quoniam enim naues vel exacte vel ſaltem proxime ſecundum directionem ſpinae progredi ſolent, actione gubernaculi ipſe nauis curſus immutatur: ſcilicet quando conuerſio fit ad dextram, tum ſimul curſus nauis ad dextram hoc eſt a ſeptentrione verſus orientem, vel hinc verſus auſtrum, vel ab auſtro verſus occaſum, hincue verſus boream deflectitur: in plagas autem contrarias deflectitur curſus, quando conuerſio fit ad ſiniſtram: ex his igitur iam intelligitur effectum gubernaculi eo fore maiorem, quo longius id a centro grauitatis remoueatur, quamobrem ipſi etiam in extrema puppi ſuus aſſignatus eſt locus. Praeterea vero etiam eximius eſt gubernaculi vſus in curſu nauis directo et immutato conſeruando, quo opus eſt quando potentiae ſollicitantes ſimul

vim habent nauem conuertendi circa axem verticalem, tum enim ope gubernaculi haec vis eſt deſtruenda. Ne autem hoc eueniat, quod ingens merito cenſetur incommodum, in id maxime incumbi ſolet, vt tam potentiarum ſollicitantium media directio per illum axem verticalem tranſeat, quam reſiſtentia a quae etiam vi careat nauem conuertendi. Quamobrem quo iſtud incommodum enitetur, tam idoneus malorum locus, quippe quibus vires applicari ſolent nauem propellentes, diligenter eligendus, quam anterior nauis figura, a qua reſiſtentia eiusque directio pendet, ſummo ſtudio eſt determinanda; quae omnia in ſequentibus fuſius euoluentur. Nunc autem reſtat, vt ipſum motum rotationis circa axem verticalem determinemus, in quo, quia de reſiſtentia nondum conſtat, animum ab aquae reſiſtentia omnino abſtrahemus; parum autem intereſt noſſe quantum iſte motus conuerſionis a reſiſtentia aquae retardetur; dummodo enim conſtet, iſtum effectum ſequi, atque iudicari queat, quomodo ſe habeat eius celeritas pro variis potentiis ſollicitantibus, pro variaque nauium conditione, ad inſtitutum abunde ſufficit. Quamobcauſam etiam in ſequentibus capitibus tantum inueſtigabimus, quantum reſiſtentia aquae motum nauis progreſſiuum retardet, neque erimus ſolliciti, quantum conuerſionem ſeu deflexionem impediat.

PROPOSITIO 48.

Problema.

458. *Si nauis a potentiis ad motum rotatorium circa axem verticalem incitetur, determinare ipſum motum, quo circa hunc axem conuertetur.*

So-

Digitized by Google

Solutio.

Ex iis quae ſupra de motu rotatorio circa axem quempiam per centrum grauitatis tranſeuntem definiendo ſunt demonſtrata, intelligitur ad hoc negotium duabus opus eſſe rebus, momento ſcilicet potentiarum reſpectu illius axis ſumto, atque momento materiae ſeu inertiae corporis reſpectu eiusdem axis. Cum igitur in praecedente propoſitione momentum ex omnibus potentiis ſollicitantibus reſultans definire docuerim, quod tendat ad nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum convertendam, quod ſit $= Pa$ facto ſcilicet ex pondere quopiam P in rectam datam a, ſupereſt vt momentum inertiae ſeu materiae totius nauis reſpectu eiusdem axis determinetur, quod inuenietur multiplicando ſingulas nauis particulas per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe illo verticali, quorum productorum aggregatum huiusmodi habebit formam Mb^2, in qua M denotat pondus nauis, b vero rectam longitudine datam. Vis igitur gyratoria, qua nauis actu circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem circumagetur erit $= \frac{Pa}{Mb^2}$, ex qua motum angularem definire licebit. Si nunc ponamus nauem iam tantum habere motum angularem circa axem verticalem, vt punctum quodpiam in diſtantia f ab axe ſitum celeritatem habeat altitudini v debitam, erit, dum illud punctum arculum dx abſoluit $dv = \frac{Pafdx}{Mb^2}$: Hinc integrando fiet $v = \frac{Pafx}{Mb^2}$, vbi x arcum ab illo puncto ab initio motus iam deſcriptum denotat. Sit autem s angulus iam deſcriptus, eſt $s = \frac{x}{f}$; ideoque $\frac{v}{ff} = \frac{Pas}{Mb^2}$. Celeritas igitur angularis iam

acquiſita erit $= \frac{\sqrt{v}}{f} = \sqrt{\frac{Pas}{Mb^2}}$; ſiquidem reſiſtentia aquae animo remoueatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

459. Manente igitur vi conuertente eadem nauis eo facilius circa axem verticalem conuertetur, quo minus fuerit momentum inertiae nauis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 2.

460. Iſta ergo nauis conuerſio eo facilius abſoluetur, quo propius omnia onera ad axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem collocentur. Contra autem, ſi omnia onera ab hoc axe maxime fuerint remota, conuerſio fiet difficillima.

Coroll. 3.

461. Prout ergo nauis vel facillime conuerſionem admittere, vel conuerſioni maxime reſiſtere debet, ita inde ratio onerationis reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti erit petenda.

Coroll. 4.

462. Hinc intelligitur nauem eo citius actioni gubernaculi obſequi, quo propius merces reliquaque onera ad axem verticalem collocentur. Hoc enim pacto momentum inertiae nauis eo minorem obtinebit valorem.

Coroll. 5.

463. Ex iſta ergo propoſitione, ſi impulſus aquae in gubernaculum fuerit definitus, effectus gubernaculi pro quaque naui facile poterit diiudicari ac determinari.

Digitized by Google

Scholion.

464. Expoſiti igitur atque definiti ſunt quinque effectus; quos potentiae in corpore quocunque aquae innatante producere valent, qui ita a ſe inuicem ſunt disiuncti, vt quisque ſine reliquis locum habere queat. Quamobrem ſi, dum corpus aquae innatans a potentiis quibuscunque ſollicitetur, ſinguli iſti quinque effectus determinentur, conſtabit quomodo corpus a potentiis afficiatur; definitum enim erit primo, quanto corpus magis minusue aquae immergatur, deinde quanta vi ad motum progreſſiuum et in quanam directione vrgeatur; tertio et quarto cognoſcetur, quantum corpus cum circa axem horizonalem longitudinalem inclinetur; ac quinto denique patebit, quanta vi corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertatur. Cum igitur in his quinque effectibus omnis potentiarum actio conſiſtat, hoc caput finiemus, atque ad aquae reſiſtentiam definiendam progrediemur, quippe qua opus eſt ad ipſum nauium motum determinandum.

 CAPVT

Digitized by Google

Caput Quintum
DE
RESISTENTIA, QVAM FIGVRAE PLANAE IN AQVA MOTAE PATIVNTVR.

PROPOSITIO 49.
Problema.

465. *Si ſigura plana data celeritate in aqua directe moueatur, definire reſiſtentiam ſeu motus diminutionem, quam patietur, dum datum ſpatium percurrit.*

Solutio.

Tab. XXII. fig. 1. Figura plana in aqua directe moueri dicitur, quando eius directio ad ipſam ſuperficiem planam eſt perpendicularis. Repraeſentet igitur recta AB ſuperficiem planam, cuius area ſit $= aa$, in aqua motam in directione CO ad ipſam ſuperficiem normali. Sit pondus ſeu maſſa corporis, quod hanc ſuperficiem planam habet, quae in aquam AEFB incurrit $= M$, eiusque celeritas, qua in recta CO progreditur, et reipſa progredi pergeret, niſi reſiſtentia adeſſet, debita altitudini v. Iam ad vim reſiſtentiae definiendam concipiatur corpus momento temporis progredi, ita vt ſuperficies plana AB perueniat in ab abſoluto ſpatiolo $Aa = Bb = dx$; ſitque celeritas, quam peracto hoc ſpatiolo retinebit debita altitudini $v - dv$. Dum autem corpus per ſpatiolum Cc progreditur, a-

quam

Digitized by Google

quam AB*ba* de loco ſuo pellet per conflictum, ita vt corpus interea colliſionem tranſigat cum mole aquea AB*ba*, cuius volumen erit a^2dx, eiusque maſſa ſeu pondus propterea exprimatur per ma^2dx, denotante m aquae grauitatem ſpecificam. Incurrit igitur corpus M celeritate ſua $\sqrt{v}$ in molem aqueam ma^2dx quieſcentem directe, ex quo perſpicuum eſt directionem vis, quam corpus in hoc conflictu ſentiet, fore normalem ad ſuperficiem incurrentem AB, atque tranſituram eſſe per centrum grauitatis C ſuperficiei ipſius, eo quod in recta C*c* ſimul centrum grauitatis molis aquae AB*ba* ſitum erit; vrgebitur ergo corpus M in hoc conflictu vi quadam CP, cuius directio directe erit contraria directioni motus CO. Ad diminutionem motus igitur definiendam regulas communicationis motus in ſubſidium vocari oportet, et quidem eas, quae ad corpora perfecte mollia ſpectant, cum aquam hoc ſaltem caſu omni elaſticitate carere experimenta ſatis declarent. Cum itaque ante conflictum motus quantitas adſit $= M\sqrt{v}$; poſt conflictum vero, quoniam moles aquea AB*ba* eadem celeritate mouebitur qua corpus M, debita ſcilicet altitudini $v-dv$, erit motus quantitas $(M+ma^2dx)\sqrt{(v-dv)} = (M+ma^2dx)(\sqrt{v}-\frac{dv}{2\sqrt{v}})$; has duas motus quantitates inter ſe aequales eſſe oportet, vnde oritur $\frac{Mdv}{2\sqrt{v}} = ma^2dx\sqrt{v}$; ſeu $Mdv = 2ma^2vdx$. Ponatur nunc potentia p tanta, vt corpus in directione CP ſollicitando, interea dum corpus per ſpatium $Cc = dx$ mouetur, eandem motus diminutionem producere poſſet, foret $dv = \frac{pdx}{M}$; ideoque $p = 2ma^2v$; ex quo perſpicitur aquae reſiſtentiam in ſuperficiem a^2 celeritate debita altitudini v directe motam aequi-

Digitized by Google

aequiualere ponderi voluminis aquae $2a^2v$; ſeu aequalem eſſe ponderi cylindri aquei, cuius baſis aequalis ſit ſuperficiei incurrenti in aquam a^2; altitudo vero adaequet duplam altitudinem celeritati corporis debitam. Idem ergo aqua per reſiſtentiam efficit, ac ſi corpus M ſollicitaretur a potentia tanta, quantam aſſignauimus in directione CP, ad ſuperficiem corporis in aquam directe impingentem normali, et per eius ipſius ſuperficiei centrum grauitatis C tranſeunte Q. E. I.

Coroll. 1.

466. Reducta igitur eſt reſiſtentia, quam corpus plana ſuperficie praeditum directe in aquam incurrens patitur, ad potentiam, cuius tum directio tum quantitas pondere expreſſa datur.

Coroll. 2.

767. Media igitur directio reſiſtentiae, quam ſuperficies plana in aqua directe mota patitur, eſt normalis ad ipſam ſuperficiem et per eius centrum grauitatis tranſit.

Coroll. 3.

468. Quantitas autem reſiſtentiae tenet rationem compoſitam ex ipſa ſuperficie et quadrato celeritatis; et hancobrem pro eadem ſuperficie reſiſtentiae ſunt in duplicata ratione celeritatum.

Coroll. 4.

469. Si aquae volumen pondere ipſius corporis M pondus adaequantis ponatur $= V$; erit $V : M = 2\,a^2v$ ad pondus cylindri aquei, cuius baſis eſt aa et altitudo $2\,v$: quo

quocirca reſiſtentia, quam ſuperficies plana a^2 celeritate altitudini $\underline{v}$ debita in aquam directe occurrens patitur, aequivalet ponderi $\frac{2Ma^2v}{V}$.

Coroll. 5.

470. Eandem ergo vim corpus quiescens ſentiet, in cuius ſuperficiem planam aqua celeritate altitudini $\underline{v}$ debita impingit, ideo quod effectus ex colliſione corporum ortus tantum a celeritate reſpectiua pendet, quae vtroque caſu eſt eadem.

Coroll. 6.

471. Haec ergo propoſitio aeque valet ad motum corporum in aqua quieſcenti, ac in fluuiis determinandum, ſiquidem ſuperficies reſiſtentiam patiens fuerit plana, atque ea directe in aquam, vel aqua directe in ipſam impingat.

Scholion 1.

472. Multum etiamnum inter Auctores, qui de aquae reſiſtentia ſcripſerunt, diſputatur, vtrum reſiſtentia aequiualeat duplo cylindro aqueo, cuius baſis aequalis ſit ſuperficiei reſiſtentiam directe excipienti, et altitudo aequalis altitudini celeritati debitae, prout hic quidem inuenimus, an ſimplo tantum cylindro. Elicuimus hic autem duplum eiusmodi cylindri ad reſiſtentiam aquae exprimendam, quia poſuimus aquae particulas perfecte molles et omni elatere carentes, quod quidem experimenta ſuadent. At ſi aquae perfecta elaſticitas tribuatur, vtique alia reſiſtentiae ratio prodiret. Si enim regulae, quae in colliſione corporum elaſticorum locum habent, in ſubſidium vocentur, tum

D d adeo

adeo quadruplum memorati cylindri prodiret, reſiſtentiaque reperietur $= 4ma^2v$; Sed cum hac conſideratione aquae maior celeritas communicetur, quam ipſum corpus retinet, aqua a corpore ita reſilire deberet, vt vacuum inter corpus et aquam relinqueretur. Quod cum ob aquae pondus, quo eius partes inter ſe comprimantur euenire nequeat, regulae communicationis, quae corporibus elaſticis ſunt accommodatae, locum hic inuenire non poterunt; ſed principium generale, quo illae regulae nituntur, et quod in conſeruatione virium viuarum conſiſtit, erit adhibendum. Ob aquae compreſſionem igitur vtique eſt ſtatuendum, corpus M et aquam AB*ba* eandem acquirere celeritatem. Hoc vero poſito, quia ante conflictum vis viua adeſt $= Mv$, poſt conflictum vero vis viua eſt $= (M + ma^2dx)(v - dv)$, his aequatis fiet $Mdv = ma^2vdx$; vnde potentia aequiualens reſiſtentiae orietur = ponderi $m\,a^2\,v$, hoc eſt cylindro aqueo baſis a^2 et altitudini v. Quaecuncunque autem reſiſtentiae ratio locum habeat, calculus manet idem, differt enim tantum coefficiente iſtius cylindri aquei, qui illo caſu eſt 2 hoc vero 1. Quamobrem iſtam controuerſiam non multum curabimus, cum, vteruis caſus valeat, proportiones maneant eaedem, ad quas praecipue attendemus; vtroque enim caſu directio reſiſtentiae eſt normalis ad ſuperficiem planam directe in aquam incurrentem, atque per ipſius ſuperficiei centrum grauitatis tranſit, eſtque praeterea vtroque caſu proportionalis areae ſuperficiei et quadrato celeritatis coniunctim. Experimenta autem, quae circa reſiſtentiam corporum in aqua motorum ſunt inſtituta pro ſimplici cylidro pugnare videntur, id quod cum argumento ex conſeruatione virium viuarum petito mifice congruit. Facile etiam patet reſiſtentiam minorem eſſe

eſſe debere, quam in ſolutione inuenimus; ibi enim, quia aqua poſt colliſionem corpus comitatur, impulſus ſequentes debiliores eſſe debent quam aſſumſimus.

Scholion 2.

473. Experimenta ſcilicet, quae Newtonus cum globis in aqua delapſis inſtituit, ſatis clare euincere videntur reſiſtentiam tantum per ſimplicem cylindrum aqueum, cuius altitudo ſcilicet aequetur ſimplici altitudini celeritatem generanti, eſſe exponendam. Praeterea vero quia aqua praeter hanc reſiſtentiam, quae ab alliſione proficiſcitur, aliam habet reſiſtentiam a tenacitate particularum oriundam, haud parum difficile eſt definire per experimenta, quanta ſit reſiſtentia a ſola alliſione orta. Quidquid igitur ſit, cum experimenta poſteriori hypotheſi, qua reſiſtentia per ſimplum cylindrum aqueum exponitur, ſatis ſint conſentanea, eam hypotheſin hic adoptabimus, et reſiſtentiam, quam ſuperficies plana in aquam directe impingens patitur, menſurabimus pondere cylindri aquei, cuius baſis aequetur areae ſuperficiei, altitudo vero ipſi altitudini celeritati debitae; ita in caſu coroll. 4. reſiſtentia aequalis erit ponenda ipſi $\frac{Ma^2v}{V}$. Eadem vero reſiſtentiae hypotheſis confirmari poteſt ſequenti argumento non quidem apodictico. Sit vas ampliſſimum aqua repletum ACDB, cuius altitudo AC $= v$, pertuſum ſit hoc vas infra ad latus foramine DE cuius area ſit $= a^2$, effluet aqua per hoc foramen celeritate debita altitudini v, iam venae aquae effluentis E*d* opponatur directe obex planus *de* ipſi foramini amplitudine aequalis, atque hic obex ab effluente aqua eandem Tab. XXII. fig. 2.

 dem

dem vim ſuſtinebit, ac ſi ipſe celeritate altitudini v debita directe contra aquam quieſcentem impingeret. Conſentaneum autem videtur, obicem in de eandem preſſionem eſſe paſſurum, ac ſi in DE eſſet collocatus, hoc vero caſu obex omnino obturabit foramen effluxumque penitus impediet; nunc autem preſſionem patietur aequalem ponderi cylindri aquei, cuius baſis aequatur ipſi ſuperficiei obicis a^2, altitudo vero altitudini $AC = v$, ex quo ſequitur reſiſtentiam ſuperficiei planae in aqua directe motae aeſtimandam eſſe ex ſimplici cylindro aqueo, cuius altitudo altitudini celeritati debitae aequalis ſit. Experimenta etiam hoc ratiocinium ſatis confirmant, nam quanquam ſi obex maior adhibeatur, quam eſt foramen DE, reſiſtentia aquae maior ſentiatur, tamen hoc magnitudini obicis tribuendum videtur, quippe ad cuius latera aqua defluit, maioremque preſſionem exercet, quam ſi obex orificium tantum aequaret; quamobrem non dubitandum eſt quin obex ſuperficiem maiorem non habens quam eſt amplitudo foraminis, aſſignatam preſſionem ſit ſenſurus. Quoniam porro eadem hypotheſis confirmatur, ſi aquae elaſticitas, quae omnino adimi non poteſt, tribuatur, et praecipue, ſi conſeruatio virium vivarum ſtatuatur, cuius vſus vbique ſummus conſpicitur, eo minus dubitabimus eam ſolam recipere, eique totam reſiſtentiae doctrinam ſuperſtruere; idque eo magis, cum illi experimenta maxime faueant.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO 50.

474. *Si ſuperficies plana in aqua oblique moueatur, determinare reſiſtentiam, qua motus ſuperficiei ab aqua retardabitur.* Tab. XXII. fig. 3.

Solutio.

Quia ſuperficies plana oblique moueri dicitur, quando directio motus ad ipſam angulum conſtituit obliquum, repraeſentet AB ſuperficiem planam, cuius area ſit $= a^2$; quae moueatur in aqua directione MC, quae cum plano ſuperficiei AB angulum conſtituat ACM cuius ſinus ſit $= n$; poſito ſinu toto $= 1$; celeritas vero qua ſuperficies mouetur debita ſit altitudini v. Concipiatur iam vt ante ſuperficies AB in aqua promoueri per ſpatiolum $Cc = dx$, atque hoc abſoluto peruenire in ab, interea conflictum habuerit neceſſe eſt cum mole aquea $ABba$, cuius volumen eſt $= na^2 dx$. Minor igitur aquae portio motui ſuperficiei obſtat, quam ſi directe in aqua moueretur, idque in ratione ſinus anguli incidentiae ad ſinum totum; et hancobrem ex hoc capite reſiſtentia, quam pateretur in motu directo, diminuenda eſt in ratione ſinus anguli incidentiae ACM ad ſinum totum. Deinde quanquam ſuperficies in ſingulas aquae particulas oblique impingit, tamen impulſus directio erit ad ſuperficiem AB normalis, ita vt reſiſtentia in ſuperficiem AB vim exerat, cuius directio ad eam erit normalis CP, atque per ipſius ſuperficiei centrum grauitatis C tranſibit. At quoniam omnes conflictus huius ſuperficiei cum ſingulis aquae particulis ſunt obliqui, minus erunt efficaces, quam ſi eſſent directi, idque in ratione ſinus anguli incidentiae ACM ad ſinum totum. Cum

igitur in iſta impulſione obliqua reſiſtentia ob duplicem cauſam bis debeat diminui in ratione ſinus anguli incidentiae ad ſinum totum, ſe habebit reſiſtentia, dum ſuperficies AB in aqua oblique mouetur, ad reſiſtentiam, quam eadem ſperficies eadem celeritate directe mota pateretur, vt quadratum ſinus anguli incidentiae MCA ad quadratum ſinus totius hoc eſt vt a^2 ad 1. Quare cum vis reſiſtentiae in caſu motus recti ſit $= ma^2v$, ſeu ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt $= a^2$ et altitudo aequalis altitudini debitae celeritati, erit vis reſiſtentiae pro praeſenti caſu $= n^2ma^2v$, hoc eſt ponderi cylindri aquei baſin habentis aequalem ipſi ſuperficiei et altitudinem aequalem altitudini celeritati debitae, multiplicato per quadratum ſinus anguli incidentiae MCA poſito ſinu toto $= 1$. Q. E. I.

Coroll. 1.

475. Reſiſtentia igitur, quam idem planum ſub diverſis angulis in aqua motum eadem celeritate patitur, eſt in duplicata ratione ſinus anguli quem planum cum directione motus conſtituit.

Coroll. 2.

476. Si igitur cognita fuerit vis reſiſtentiae, quam planum in aqua directe motum ſuffert, ſimul innoteſcet reſiſtentia, quam idem planum vtcunque oblique in aquam impingens patietur.

Coroll. 3.

477. In quacunque igitur directione ſuperficies plana in aqua moueatur, directio reſiſtentiae ſemper eſt eadem,

Digitized by Google

dem, eſt enim normalis ad planum ſuperficiei, atque per centrum grauitatis ipſius ſuperficiei tranſit.

Coroll. 4.

478. Reſiſtentia porro, quam idem planum ſub variis angulis diuerſisque celeritatibus in aqua motum patitur, eſt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum, et duplicata ſinus anguli quo in aquam impingit.

Coroll. 5.

479 Reſiſtentiae autem, quas diuerſa plana in aqua mota ſufferunt, rationem tenent compoſitam ex ſimplici arearum, duplicata celeritatum et duplicata ſinuum angulorum, quibus in aquam incurrunt.

Scholion 1.

480. Inſeruiunt haec problemata inſtar baſis ad reſiſtentiam determinandam, quam corpora cuiuscunque figurae in aqua mota patiuntur. Pendet enim reſiſtentia a corporis ſuperficie anteriore qua in aquam incurrit, quippe quae ſola cum particulis aquae confligatur, pars autem corporis poſterior ab aqua nullam patitur reſiſtentiam, eo quod ea ad aquam non allidit. Quamquam enim etiam pars poſterior ab aqua affici videatur, dum aqua locum, quem corpus poſt ſe reliquit, occupans, in partem poſticam impetum facit ac motum accelerat, tamen iſte effectus vix eſt ſenſibilis, et hancobrem hic conſiderari non meretur; ad quod accedit, quod theoria aquae nondum ſit ad eum perfectionis gradum euecta, vt aquae

effectus

Digitized by Google

effectus in poſticam corporis natantis partem definiri queat. Hac igitur conſideratione praetermiſſa, ſi corporis aquae innatantis anterior ſuperficies vel plana fuerit vel ex planis pluribus conſtet, ope duorum horum problematum reſiſtentia abſolute poterit definiri. Praeterea vero inſeruiunt haec problemata ad reſiſtentiam corporum quacunque ſuperficie praeditorum aſſignandam; quomodocunque enim ſuperficies fuerit comparata, ea more ſolito tanquam ex innumerabilibus planis compoſita conſiderari, atque ex regulis ſtaticis reſiſtentia totalis, quae ex reſiſtentiis ſingulorum elementorum emergit, per integrationem definiri poterit, quo pacto tam directionem mediam omnium reſiſtentiarum, quam ipſam potentiam aequiualentem determinare licebit.

Scholion 2.

481. Cum igitur nunc propoſitum ſit reſiſtentiam indagare, quam corpora quaecunque aquae innatantia perpetiuntur, quo tota iſta tractatio commode et dilucide abſoluatur, certum ordinem ſequi oportebit. Primum igitur hoc capite figuras tantum planas aquae tum horizontaliter tum verticaliter innatantes conſiderabo, atque vim reſiſtentiae eiusque directionem determinabo, inde enim ad ipſa corpora facilius tranſire licebit. Eas vero figuras, quas aquae horizontaliter innatare ponemus, axe ſeu diametro praeditas aſſumemus, quia naues, ad quas hic potiſſimum reſpicimus, plano diametrali, quod verticaliter per ſpinam tranſeat, gaudent, ex quo ſingulae ſectiones horizontales diametro ſpinae nauis parallela erunt prae-

Digitized by Google

praeditae. Hic autem in reſiſtentia ingens oritur diſcrimen, vtrum eiusmodi ſuperficies ſecundum diametri ſuae directionem in aqua moueatur, an oblique? ſi enim ſecundum directionem diametri moueatur, manifeſtum eſt mediam directionem reſiſtentiae ob ſimilem ex vtraque diametri parte effectum, eſſe in ipſa diametro poſitam, ita vt hoc caſu tantum quantitas vis reſiſtentiae inueſtigari debeat: ſin autem eiusmodi ſuperficies non ſecundum diametri ſuae directionem in aqua progrediatur, tum ſeorſim tam mediam directionem, quam ipſam quantitatem reſiſtentiae inueniri oportet, quae inueſtigatio propterea plus habebit difficultatis. Deinceps in capite ſequente ſimili modo in reſiſtentia corporum ipſorum aquae innatantium inueſtiganda verſabimur; eiusmodi enim corpora tantum contemplabimur, quae praedita ſint plano diametrali verticali, quo nauium conditio imprimis ſpectetur, in qua tractatione iterum praecipue ad directionem motus erit attendendum, vtrum is fiat ſecundum diametrum ſectionis aquae, an ad diametrum oblique; priore enim caſu media directio reſiſtentiae ſponte datur, poſteriore vero haud exiguo labore demum eſt inueſtiganda. In vtraque autem tractatione eiusmodi problemata afferemus, ex quibus pateat, quaenam nauium figura ratione reſiſtentiae ſit aptiſſima; quae tum ex minima reſiſtentia tum ex idonea reſiſtentiae directione deſumentur. Antequam autem haec omnia euoluenda ſuſcipiamus, hic locus maxime eſt idoneus ad effectum gubernaculi in naue circa axem verticalem conuertenda inquirendum; quoniam gubernaculum ſuperficie plana ſolet eſſe praeditum, cuius ideo vis, quam contra aquam impingens patitur, ex iſta propoſitione facile definiri poteſt.

PROPOSITIO 51.
Problema.

482. *Si nauis in directione quacunque progrediatur, atque gubernaculum ad datum angulum conuertatur, inuenire vim, quam gubernaculum habebit ad nauim circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertendam.*

Tab. XXII. fig. 4.

Solutio.

Quoniam media directio vis aquae, in quam gubernaculum irruit, per centrum grauitatis ſuperficiei planae gubernaculi tranſit, ad eamque eſt normalis, concipiatur ſectio nauis horizontalis ARB*m* per gubernaculi AD centrum grauitatis C tranſiens. Manifeſtum autem eſt hic non totius gubernaculi, ſed eius tantum partis, quae aquae eſt immerſa centrum grauitatis ſumi debere. Repraeſentabit itaque in figura A puppim, B proram, AB ſpinam nauis, AD gubernaculum ſitum tenens naturalem: Sit autem G punctum axis verticalis nauis per eius centrum grauitatis ducti, in quo per planum horizontale ARB*m* tranſit; GM vero ſit directio curſus ſeu motus nauis, ita vt angulus BGM denotet declinationem curſus nauis a curſu directo, qui ſecundum directionem ſpinae GB fieri cenſetur, gubernaculum vero inclinatum ſit ad angulum DA*d*, ita vt ſitum A*d* obtineat, quo ſecundum directionem $\underline{c\,m}$ directioni curſus GM parallelam in aquam impingit: Sit nunc anguli BGM ſinus $= m$; coſinus $= \mu$; anguli vero DA*d* ſinus $= n$; coſinus $= v$, exiſtente ſemper ſinu toto $= 1$. Sit porro area vel ſuperficies gubernaculi vim aquae excipiens $= a^2$; AC$=$A*c*$=b$; AG$=f$;

$G = f$; celeritasque, qua nauis mouetur, debita ſit altitudini v. Denique ſit pondus nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae nauis $= V$, et momentum inertiae nauis reſpectu axis verticalis $= Mk^2$. His praemiſſis erit Acm angulus ſub quo gubernaculum Ad ad aquam allidit, qui cum ſit $= DAd + BGM$, erit ſinus eius $= mv + n\mu$; hinc igitur vis reſiſtentiae, quam gubernaculum ſentiet erit $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$. Cuius directio cr tranſibit per gubernaculi centrum grauitatis c, eritque ad Ad normalis. Momentum ergo huius vis ad nauem cira axem verticalem circumuertendam erit $= (mv+n\mu)^2 \frac{Ma^2 v}{V} \cdot Gr$ ſin. Arc. Eſt vero ob angulum Acr rectum, ſinus $Arc = v$; et $Ar = \frac{b}{v}$; vnde fit $Gr = f + \frac{b}{v}$. Quo circa momentum vis gubernaculi ad nauem circa G conuertendam erit $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v(b+vf)}{V}$. Quod diuiſum per momentum inertiae nauis reſpectu axis verticalis MK^2, dabit vim gyratoriam nauis circa eundem axem verticalem $= \frac{(mv+n\mu)^2 (b+vf) a^2 v}{VK^2}$; cui vi acceleratio momentanea motus angularis, qui naui circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum imprimitur, eſt proportionalis. Q. E. I.

Coroll. 1.

483. Pro eadem ergo naui, quo maior fuerit expreſſio $(mv+n\mu)^2 (b+xf)$ eo maior erit effectus gubernaculi ad nauem conuertendam; ex quo angulus DAd definiri poterit, quo effectus gubernaculi fit maximus.

Coroll. 2.

484. Si igitur anguli DAd coſinus ſeu $\underline{v}$ ponatur $= x$, erit $n = \surd(1 - xx)$, atque formula $(mx + \mu \surd(1 - xx))^2 (b + fx)$ ſeu eius radix quadrata $(mx + \mu \surd(1 - xx)) \surd(b + fx)$ fiet maximum, cum x determinabitur ex hac aequatione: $2\left(m - \frac{\mu x}{\surd(1-xx)}\right)(b + fx) + f(m + \mu \surd(1 - xx)) = 0$, quae tranſit in hanc $m(2b + 3fx) \surd(1 - xx) = \mu(3fxx + 2bx - f)$.

Coroll. 3.

485. Si ergo nauis curſu directo progrediatur, vt angulus BGM euaneſcat, erit $m = 0$, et $\mu = 1$, atque vis gyratoria $= \frac{n^2 a^2 v(b + vf)}{VK^2}$; maximum igitur gubernaculum praeſtabit effectum, ſi fuerit $3fxx + 2bx - f = 0$, hoc eſt, ſi fuerit anguli DAd coſinus $x = \frac{-b \pm \surd(bb + 3ff)}{3f}$.

Coroll. 4.

486. Si igitur b tam fuerit paruum, vt prae f euaneſcat, erit anguli DAd, quo maximum effectum praeſtat gubernaculum, coſinus $= \frac{1}{\surd 3}$; hoc eſt angulus DAd erit $54^\circ, 44'$.

Coroll. 5.

487. Si nauis curſus a directo declinet angulo BGM, gubernaculum autem in ſitu naturali AD relinquatur, praeſtabit tamen gubernaculum effectum ad nauem conuertendam, cuius vis gyratoria erit $\frac{m^2 a^2 v(b+f)}{VK^2}$.

Coroll.

Coroll. 6.

488. Afficit autem praeterea vis gubernaculi ipſum nauis motum, quae mutatio reperietur, ſi vis reſiſtentiae $\frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$, concipiatur in directione parallela GR centro grauitatis applicata; retardabitur ſcilicet motus nauis in directione ſua a potentia $\frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$; at a ſemita rectilinea deturbabitur potentia $\frac{(\mu v-mn)(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$.

Coroll. 7.

489. Habebit inſuper gubernaculum in ſitu A*d* conatum ſeſe circa A conuertendi ſecundum plagam *d*D, qui conatus exprimetur momento $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 bv}{V}$; tanta igitur vis a gubernatore adhiberi debet ad gubernaculum in ſitu A*d* continendum.

Coroll. 8.

490. Si igitur nauis curſu obliquo feratur, vi adeo opus erit ad gubernaculum in ſitu naturali AD conſeruandum, quae vis exprimetur momento $\frac{Mn^2 a^2 bv}{V}$.

Coroll. 9.

491. Manifeſtum denique eſt omnes has vires a gubernaculo exertas ceteris paribus creſcere in duplicata ratione celeritatum, quibus nauis progrediatur.

Scholion.

492. In hac igitur propoſitione non ſolum definiuimus quanta vi gubernaculum nauem circa axem verti-

ticalem per centrum grauitatis ductum circumagat, ſed etiam quantum tam ipſius nauis celeritatem, quam curſus directionem afficiat, in corollariis determinauimus. Praeterea etiam vim aſſignauimus, quam nauclerus adhibere debet ad gubernaculum, in dato ſitu conſeruandum tanta, ſcilicet haec naucleri vis requiritur, vt eius momentum reſpectu axis circa quem gubernaculum mobile exiſtit, adaequet momentum inventum, quo gubernaculum ex ſitu A*d* verſus AD tendit. Intelligitur vero etiam, niſi planum ARB*m* per nauis centrum grauitatis tranſeat, vim gubernaculi etiam ſe exerere ad nauem circa axem horizontalem tam longitudinalem quam latitudinalem inclinandam, quae inclinatio autem attendi vix meretur, cum ſit exigua, atque tum ſolum eueniat, quando gubernaculum vſurpatur. Quamobrem miſſo gubernaculo ad ipſum propoſitum reuertamur, ac primo quidem, quantam reſiſtentiam figurae planae aquae innatantes patiantur inueſtigemus.

PROPOSITIO 52.

Problema.

Tab. XXIII. fig. 1.

493. *Innatet aquae figura plana* MAN *diametro* AP *praedita ſecundum directionem* AC *ipſius diametri* AP *data cum celeritate, inuenire reſiſtentiam, quam haec figura ab aqua patietur.*

Solutio.

Primum perſpicuum eſt, quia figura ſecundum directionem axis AC in aqua progreditur, ob vtrinque omnia ſimilia mediam directionem reſiſtentiae in ipſam diametrum AP incidere debere, ita vt tantum opus ſit eius quan-

quantitatem determinare. Hancobrem ponatur celeritas, qua figura in aqua ſecundum directionem AC progreditur, debita altitudini v ac ducantur ad diametrum AP duae ordinatae orthogonales MPN, mpn, vtrinque aequalia et ſimilia curuae elementa Mm, Nn abſcindentia, quae elementa quantam reſiſtentiam excipiant eſt indagandum. Ponatur $AP = x$, $PM = PN = y$ erit $Pp = dx$, et $Mm = Nn = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$. Iam anguli, quo elementa Mm et Nn in aquam illidunt, ſinus eſt $= \frac{dy}{ds}$. Si autem elementa haec in aquam directe ſeu normaliter impingerent, foret vis reſiſtentiae $= vds$ hoc eſt ponderi cylindruli aquei baſis ds et altitudinis v. Praeſenti igitur caſu vis, quam vtrumque elementum patitur, erit $= \frac{vdy^2}{ds}$; cuius vtriusque vis directio eſt normalis ad ipſa elementa, ideoque in normales MR et NR incidet. Si nunc hae duae vires reſoluantur in binas, quarum alterae directiones habeant in applicatis, alterae parallelas axi AP, illae ſe mutuo deſtruent, hae vero conſpirabunt, habebuntque mediam directionem in AP incidentem. Quamobrem ob reſiſtentiam elementorum Mm, Nn, figurae in directione AP reſiſtetur vi $\frac{2vdy^2}{ds}$; ex quo tota curua MAN reſiſtentiam pariet $= 2\int \frac{vdy^3}{ds^2} = 2v\int \frac{dy^3}{ds^2}$, ob v conſtantem, huiusque vis directio ſita erit in ipſa diametro AP. Q. E. I.

Coroll. 1.

494. Directio reſiſtentiae ergo, quam eiusmodi figura ſecundum diametrum AC in aqua promota ſentit, directe contraria erit directioni motus, et hancobrem motus tantum a reſiſtentia retartabitur, directio vero non af-

ficietur

Digitized by Google

ſicietur, ſiquidem figurae centrum grauitatis in diametro AP fuerit ſitum.

Coroll. 2.

495. Reſiſtentia ergo ab A ad M et N progrediendo eousque creſcit, quoad fiat $dy = 0$, hoc eſt quoad curvae tangentes axi AP fiant parallelae. Quamobrem ſi curua fuerit indefinita, reſiſtentia ex iis tantum ramorum AM et AN portionibus aeſtimari debet, qui inter A et loca vbi eſt $dy = 0$ interiacent.

Coroll. 3.

496. Si ſola ordinata MPN in aqua directe, hoc eſt ſecundum directionem AP eadem celeritate moueretur, tum reſiſtentia quam ſentiret, foret $= 2vq$; ex quo reſiſtentia ordonatae MPN ſe habebit ad reſiſtentiam curvae MAN vt y ad $\int \frac{dy^3}{ds^2}$.

Coroll. 4.

497. Quoniam vbique eſt $dy < ds$, erit $\frac{dy^3}{ds^2} < dy$ ideoque $\int \frac{dy^3}{ds^2} < y$; quamobrem reſiſtentia, quam curua MAN patitur ſemper minor erit quam reſiſtentia, quam ſola ordinata MPN ſentiret.

Coroll. 5.

498. Eo minor ergo erit figurae MAN reſiſtentia, quo magis discrepat a recta transuerſali MPN; ſiue quo minus vbique eſt elementum applicatae dy reſpectu elementi curuae.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 6.

499. Cum autem ſit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$, erit reſiſtentia, quam curuae portio MAN perpetitur $= 2vy - 2v\int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$. Exceſſus ergo reſiſtentiae ordinatae MN ſuper reſiſtentiam arcus MAN erit $= 2v \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$.

Coroll. 7.

500. Si ergo ſola figura MAN curua MAN in qua nusquam ſit $dy = 0$ et recta MN terminata eadem celeritate tum ſecundum directionem PC, tum ſecundum contrariam PR moueatur, erit reſiſtentia in priore caſu ad reſiſtentiam in poſteriore vt $y - \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ad y. Priore ſcilicet caſu curua MAN, poſteriore vero recta MN reſiſtentiae exponitur.

Scholion.

501. Quoniam formula, qua reſiſtentia arcus MAN exprimitur $2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$ generaliter integrari nequit, ipſa reſiſtentia quantitatibus finitis exhiberi non poteſt, ac manifeſtum eſt, reſiſtentiam a mutua poſitione ſingulorum elementorum pendere. Quamobrem expediet ad ſpecialiora deſcendere, atque datas curuas conſiderare, pro quibus valor ipſius $\int\frac{dy^3}{ds^2}$ aſſignari queat: ex his enim facilius colligi poterit, cuiusmodi curuae minorem maioremue reſiſtentiam patiantur. Hoc ſcilicet modo animus lectoris praeparabitur ad curuas, quae vel inter omnes, vel inter eas, quae certa quadam proprietate ſint praeditae, minimam patiantur reſiſtentiam, cognoſcendas; cuiusmodi curuas deinceps ſum inueſtigaturus.

 Exempl.

Digitized by Google

Exemplum 1.

Tab. XXIII. fig. 2. 502. Sit figura ſeu eius ſaltem pars anterior EAF, quae reſiſtentiam ſentit, triangulum iſoſceles, quod ſecundum directionem diametri AB cuſpide A antrorſum verſa in aqua progrediatur celeritate debita altitudini v: incidet directio reſiſtentiae in rectam AB, eius vero quantitas ita ex generali ſolutione definietur. Poſitis $AB = a$; $BE = BF = b$, et vt ante $AP = x$; $PM = PN = y$; erit $a : b = x : y$, vnde fit $y = \frac{bx}{a}$; $dy = \frac{bdx}{a}$; et $ds = \frac{dx}{a} \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Ex his fient $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3dx}{a(a^2+b^2)}$, atque integrando $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3x}{a(a^2+b^2)}$. quamobrem reſiſtentia, quam pars MAN patietur, erit $= \frac{2b^3xv}{a(a^2+b^2)}$ atque poſito $x = a$, habebitur reſiſtentia deſiderata, quam triangulum totum EAF ſuffert $= \frac{2b^3v}{a^2+b^2}$.

Coroll. 1.

503. Reſiſtentia ergo, quam ſentit angulus EAF erit ad reſiſtentiam baſis EF eadem celeritate et in eadem directione in aqua motae vt bb ad a^2+b^2, hoc eſt vt BE^2 ad AE^2.

Coroll. 2.

504. Perſpicuum igitur eſt reſiſtentiam trianguli EAF in aqua vertice A antrorſum verſo ſe habere ad reſiſtentiam, quam idem triangulum baſe EF antrorſum verſa patitur in duplicata ratione ſinus anguli BAE ad ſinum totum.

Coroll. 3

505. Quo minor igitur ſeu acutior fuerit angulus

EAF

Digitized by Google

EAF manente baſi EF eadem, eo minor erit reſiſtentia, quam triangulum vertice A antrorſum verſo in aqua ſentiet.

Coroll. 4.

506. Figura plana igitur ſuper eadem baſi EF conſtituta, quae minimam patietur reſiſtentiam, erit triangulum infinite magnum, cuius vertex A in infinitum abit: talis quippe trianguli reſiſtentia eſt nulla.

Exemplum 2.

507. Sit curua MAN parabola, cuiusuis ordinis, ſiue continua, ſiue ex aequalibus eiusdem parabolae ramis AM et AN compoſita, quae celeritate altitudini $\underline{v}$ debita indirectione AC moueatur in aqua, ita vt ſit $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$. Tab. XXIII. fig. 1.

Reſiſtentiae directio, quam portio MAN patietur, incidet vtique in directionem diametri AP, quantitas vero ex aequatione $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$ ita definietur. Cum ſit $dy = \frac{mx^{m-1}dx}{a^{m-1}}$, erit $ds^2 = dx^2(1 + \frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}}) = \frac{dx^2(a^{2m-2} + m^2x^{2m-2})}{a^{2m-2}}$ atque $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{m^3x^{3m-3}dx}{a^{m-1}(a^{2m-2} + m^2x^{2m-2})} = dy - \frac{ma^{m-1}x^{m-1}dx}{a^{2m-2} + m^2x^{2m-2}}$. Hinc igitur oritur $\int\frac{dy^3}{ds^2} =$

$$y - ma^{m-1}\int\frac{x^{m-1}dx}{a^{2m-2} + m^2x^{2m-2}} = y - \int\frac{a^{\frac{2m-2}{m}}dy}{a^{\frac{2m-2}{m}} + m^2y^{\frac{2m-2}{m}}}.$$

 quae

quae expreſſio ducta in $2v$ dabit quantitatem reſiſtentiae. Pro parabola ergo Appolloniana quae eſt $m = \frac{1}{2}$, erit reſiſtentia $= 2vy - 2v\int\frac{4yydy}{aa+4yy} = 2v\int\frac{aady}{aa+4yy} = av$ Arc.t. $\frac{2y}{a}$. Tota ergo parabola in infinitum continuata reſiſtentiam patitur finitam quae erit $= \frac{\pi}{2}av$, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam. Pro reliquis vero caſibus non admodum concinnae formulae reperiuntur, quamobrem his miſſis ad alias curuas conſiderandas pergemus.

Exemplum 3.

Tab. XXIII. fig. 3. 508. Si curuae in aqua horizontaliter promotae ſecundum directionem CA pars anterior reſiſtentiam excipiens fuerit arcus circuli MAN, cuius radius AC ſit $= a$; reſiſtentiae directio ob partes vtrinque ſimiles cadet in diametrum AC. Poſitis autem AP $= x$ et PM $=$ PN $= y$; erit $x = a - V(a^2 - y^2)$ et $ds = \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ vnde fit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{y^2dy}{aa}$, atque $\int\frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{y^3}{3a^2}$. Reſiſtentia igitur quam patietur arcus MAN in directione AC erit $= 2v(y - \frac{y^3}{3aa})$. Si ergo pars figurae anterior fuerit ſemicirculus integer BAD, erit reſiſtentia quam patietur $\frac{4av}{3}$. Quamobrem ſi integra figura fuerit circulus ABED, in quamcunque plagam is in aqua promoueatur, ſemicirculus ſemper reſiſtentiae erit obnoxius, atque ob omnes partes ſimiles directio reſiſtentiae ſemicirculum anteriorem biſecabit et per centrum tranſibit, ipſaque reſiſtentia perpetuo erit $= \frac{4av}{3}$.

Corol.

Coroll. 1.

509. Reſiſtentia ergo ſemicirculi BAD ſe habebit ad reſiſtentiam diametri BD eadem celeritate directe motae vt $\frac{4av}{3}$ ab $2av$ hoc eſt vt $2 : 3$.

Coroll. 2.

510 Si autem concipiatur triangulum iſosceles BAD eadem celeritate et in eadem directione aquae innatare, erit eius reſiſtentia $= av$. Duplo igitur minor eſt reſiſtentia trianguli BAD, quam reſiſtentia diametri BD; atque ſemicirculi BAD trianguli BAD et diametri BD reſiſtentiae ſe inter ſe habebunt vt iſti numeri. $4 : 3 : 6$.

Coroll. 3.

511. Sin autem arcus indefinitus ſemicirculo minor MAN ſolus reſiſtentiam patiatur, erit reſiſtentia ipſius ad reſiſtentiam chordae MN eadem celeritate contra aquam directe impingentis vt $y - \frac{y^3}{3aa}$ ad y ſeu vt $3aa - yy$ ad $3aa$.

Coroll. 4.

512. Si inſuper triangulum iſosceles MAN in eadem directione et eadem celeritate moueatur; erit eius reſiſtentia $= \frac{y^3 v}{aa - a\sqrt{(aa-yy)}}$. Quamobrem ſegmenti MAN, trianguli MAN et chordae MN reſiſtentiae erunt inter ſe vt $\frac{6aa-2yy}{3aa} : \frac{y^2}{a^2 - a\sqrt{(aa-yy}}) : 2$. ſeu vt $6aa - 2yy : 3a^2 + 3a\sqrt{(aa-yy)} : 6aa$.

 Coro-

Digitized by Google

Coroll. 5.

513. Harum trium ergo reſiſtentiarum maxima eſt, quam chorda MN patitur. Reſiſtentia vero ſegmenti MAN aequalis fit reſiſtentiae trianguli MAN, ſi ſit $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, hoc eſt ſi arcus AM ſit 60. graduum. Reſiſtentiae igitur ſegmenti MAN erit maior quam reſiſtentia trianguli MAN ſi arcus AM excedat 60 gradus; minor vero ſi arcus AM fuerit 60° minor.

Exemplum 4.

Tab. XXIII. fig. 4. 514. Sit nunc figurae planae aquae innatantis pars anterior arcus ellipticus MAN ſeu portio ellipſis ABED, cuius alter ſemiaxis $AC = a$; alter $BC = b$, erit poſitis $AP = x$; $PM = y$, $CP = a - x$, et $a^2 = (a-x)^2 + \frac{aayy}{bb}$, vnde fit $x = a - \frac{a}{b}\sqrt{(bb-yy)}$. Hinc igitur erit $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{(b^2-y^2)}}$ atque $ds^2 = \frac{dy^2(b^4+(a^2-b^2)yy)}{bb(bb-yy)}$, quamobrem habebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bbdy(bb-yy)}{b^4+(aa-bb)yy} = -\frac{bbdy}{aa-bb} + \frac{aab^4dy}{(aa-bb)(b^4+(aa-bb)yy)}$ Ad integrationem huius formulae abſoluendam duo conſiderandi ſunt caſus, alter ſi $a > b$, alter ſi $a < b$. priore enim caſu reſiſtentia a quadratura circuli, poſteriore a logarithmis pendebit: Moueatur igitur primum ellipſis vertex acutior A in directione axis maioris EA in aqua, erit

$$\int\frac{dy^3}{ds^2} = -\frac{bby}{aa-bb} + \frac{aabb}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}\text{A tang.}\frac{y\sqrt{(aa-bb)}}{bb}; \text{ ideoque}$$

reſiſtentia quam arcus MAN patitur erit $= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{y\sqrt{(aa-bb)}}{bb} - \frac{2b^2vy}{aa-bb}$. Quare ſi integra ſemiellipſis BAD conſtituat partem figurae anteriorem, erit reſiſtentia

=

$= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$. A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - \frac{2b^3v}{aa-bb}$. Sit autem nunc $a < b$ ſeu A ellipſis vertex obtuſior, erit $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bby}{bb-aa} - \frac{aabb}{2(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$; hoc igitur caſu reſiſtentia arcus MAN prodibit $= \frac{2bbvy}{bb-aa} - \frac{aabbv}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$.

Sive autem b ſit maius ſiue minus quam a per ſeriem infinitam erit $\int \frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{aay^3}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^5}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^7}{7b^{12}} + \frac{aa(aa-bb)^3y^9}{9b^{16}} - \frac{aa(aa-bb)^4y^{11}}{11b^{20}} +$ etc. vnde fit reſiſtentia quam arcus MAN patietur $= 2vy \left(1 - \frac{aay^2}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^4}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^6}{7b^{12}} + \text{etc.}\right)$ Si igitur ellipſis tota medietas BAD reſiſtentiam patiatur, erit reſiſtentia $= 2bv\left(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(aa-bb)^2}{7b^6} + \frac{a^2(aa-bb)^3}{9b^8} - \text{etc.}\right)$

Coroll. 1.

515. Si igitur eadem ellipſis tum ſecundum directionem axis EA, tum ſecundum directionem axis DB in aqua moueatur; erit reſiſtentia in priori caſu $= 2bv\left(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(a^2-b^2)^2}{7b^6} + \text{etc.}\right)$, reſiſtentia vero in poſteriore $= 2av\left(1 - \frac{bb}{3aa} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^4} - \frac{bb(aa-bb)^2}{7a^6} - \text{etc.}\right)$.

Coroll. 2.

516. Reſiſtentia ergo ellipſis ſecundum axem maiorem EA progredientis ſe habet ad reſiſtentiam eiusdem ellipſis

ellipſis ſecundum axem minorem DB eadem celeritate promotae vt $b - \frac{a^2}{3b} + \frac{a^2(a^2-b^2)}{5b^3} -$ etc. ad $a - \frac{b^2}{3a} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^3} -$ etc. vbi $\underline{a}$ eſt ſemiaxis maior, $\underline{b}$ vero ſemiaxis minor.

Coroll. 3.

517. Si ergo differentia axium ſit valde parua puta $a = b + d$ denotante $\underline{d}$ quantitatem vehementer paruam, erit reſiſtentia ſemiſſis ellipſis BAD ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE vt $\frac{2b}{3} - \frac{4d}{15} + \frac{2dd}{21b}$, ad $\frac{2b}{3} + \frac{14d}{15} + \frac{2dd}{21b}$ hoc eſt vt 1 ad $1 + \frac{9d}{5b} + \frac{18dd}{25bb}$; quae congruit maxime cum hac ratione 1 ad $(1 + \frac{d}{b})^{\frac{9}{5}}$ ſeu $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Coroll. 4.

518. Vera autem ratio, quam reſiſtentia ſemiſſis BAD tenet ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE eſt vt $2a^2b^2$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - 2b^3\sqrt{(aa-bb)}$ ad $2a^3\sqrt{(aa-bb)} - a^2b^2 \, l \frac{a+\sqrt{(aa-bb)}}{a-\sqrt{(aa-bb)}}$ quae igitur ratio, ſiquidem b ab a non multum diſcrepet, proxime accedet ad hanc $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Exemplum 5.

Tab. XXIII. fig. 5.

519. Sit figura aquae in directione CA innatans compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ABE et ADE, erit poſitis $AC = a$ $BC = CD = b$, radius circuli, cuius ſegmenta ſunt ſumta $= \frac{aa+bb}{2b}$. Quare poſitis $AP = x$, $PM = PN = y$ habebitur $x = a - \sqrt{(a^2 - \frac{(a^2-b^2)}{b}y - yy)}$ atque $dx = \frac{(aa-bb)dy + 2bydy}{2\sqrt{(a^2b^2-(a^2-b^2)by-bbyy)}}$; vnde erit $ds^2 = \frac{(a^2+b^2)^2dy^2}{4a^2b^2-4(a^2-b^2)by-4bbyy}$. Quamobrem obtinebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{4a^2b^2dy-4(a^2-b^2)bydy-4bbyydy}{(a^2+b^2)^2}$, hincque

hincque $\int\frac{dy^3}{ds^2}=\frac{4a^2b^2y-2(a^2-b^2)byy-\frac{4}{3}bby^3}{(a^2+b^2)^2}$; quae expreſſio ducta in $2v$ dabit reſiſtentiam, quam portio MAN patitur. Quocirca ſi ponatur $y=b$ proueniet reſiſtentia, quam integra pars anterior BAD ſufferet $=\frac{4b^3v(3a^2+b^2)}{3(a^2+b^2)^2}$ Reſiſtentia autem, quam ſentiet eadem figura, ſi in directione CB eadem celeritate moueatur, erit ex exemplo 3. $=\frac{2av(3a^4+2a^2b^2+3b^4)}{3(a^2+b^2)^2}$.

Coroll. 1.

520. Reſiſtentia quam patitur recta BD in directione CA mota, eſt $=2bv=\frac{6bv(a^2+b^2)^2}{3(a^2+b^2)^2}$; vnde erit reſiſtentia figurae BAD in directione CA motae ad reſiſtentiam rectae BD in eadem directione motae vt $6aabb+2b^4$ ad $3a^4+6aabb+3b^4$ vnde reſiſtentia rectae BD multo maior eſt quam reſiſtentia figurae BAD.

Coroll. 2.

521. Reſiſtentia autem, quam patietur figura ABFD mota ſecundum directionem CA ſe habebit ad reſiſtentiam eiusdem figurae motae eadem celeritate in directione DB vt $6a^2b^3+2b^5$ ad $3a^5+2a^3b^2+3ab^4$; ſi ergo $a>b$ reſiſtentia prior ſemper eſt minor quam poſterior.

Scholion.

522. His conſideratis ſatis intelligitur nullam dari figuram finitam, quae minimam patiatur reſiſtentiam inter omnes alias iisdem terminis contentas. Quaecunque

enim aſſignetur figura minimam patiens reſiſtentiam, ſtatim alia exhiberi poſſet, quae minorem reſiſtentiam ſentiret, tantum datam curuam vel eius tantum portionem verſus eam regionem in quam ſit motus elongando. Hanc obrem nequidem quaeſtio foret inſtar ptoblematis proponere inueniendam figuram planam, quae in aqua horizontaliter promota minimam ſentiret reſiſtentiam; ipſa enim ſolutio nullum dari minimum in finitis declararet. Quo autem appareat, quaenam figurae finitae reliquis ratione reſiſtentiae ſint praeferendae ad alias conditiones ſimul eſt attendendum, quibus curua quaeſita cogatur eſſe finita. Eiusmodi autem quaeſtiones formari poſſunt, vt vel inter omnes figuras eandem aream habentes, vel inter omnes eadem perimetro cinctas ea determinetur, quae ſecundum datam directionem in aqua mota minimam patiatur reſiſtentiam. Ad ſoluendas vero iſtius modi quaeſtiones conueniet lemma ſequens praemittere, quo methodus omnia huius generis problemata ſoluendi continetur.

LEMMA.

523. *Inuenire curuam, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, vel inter omnes omnino curuas, vel inter eas tantum, quae vna quadam ſiue pluribus proprietatibus aequaliter ſint praeditae.*

Solutio.

Tam ea proprietas, quae in curua quaeſita maxima minimaue eſſe debet, quam eae proprietates, quae in curuas, e quibus electio eſt facienda, formulis integralibus indefinitis exprimentur; ex iisque formulis nullo diſcrimine habito, quaenam proprietatem maximam minimamue

mamue contineat, aut proprietates communes, natura curvae quaeſitae ſequenti modo definietur. Singulae formulae integrales propoſitae ad ordinatas orthogonales x et y reducantur, vt in illis aliae quantitates non inſint praeter x et y, cum ipſorum differentalibus tam primi quam altiorum graduum. Poſito autem dx conſtante fiat $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; etc. quibus ſubſtitutionibus quaeque formula propoſita integralis reducetur ad huiusmodi formam, $\int Zdx$, in qua Z erit quantitas compoſita ex finitis quantitatibus x, y, p, q, r, etc. Quare ſi iſta quantitas Z differentietur, eius differentiale talem habebit formam, vt ſit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. Ex hoc differentiali formetur ſequens quantitas $V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. atque eiusmodi valores V eliciantur ex ſingulis formulis integralibus propoſitis, quae vel maximum minimumue eſſe, vel omnibus curuis ex quibus quaeſita eſt definienda, communes eſſe debent. Hi denique ſinguli valores V inuenti multiplicentur per conſtantes quantitates quascunque reſpectiue, eorumque productorum ſumma ponatur $= 0$, quae aequatio naturam curvae quaeſitae exprimet. Hoc igitur facto reſtituantur loco p, q, r, etc. aſſumti valores ſcilicet $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ etc. vt obtineatur aequatio pro curua quaeſita ſolas binas variabiles x et y continens cum ſuis differentialibus, in qua ſit dx conſtans Q. E. I.

Coroll. 1.

524. Si igitur area curuae $\int ydx$ vel maxima minimaue eſſe debeat, vel omnes curuae, ex quibus quae-

Digitized by Google

ſita eſt definienda eiusdem areae ponuntur, erit $Z = y$, et $dZ = dy$, vnde formulae $\int y\,dx$ valor ipſi V reſpondens erit $= 1$.

Coroll. 2.

525. Si vel curua maximae minimaeue longitudinis deſideretur, vel omnes curuae, ex quibus quaeſita debet inueniri eiusdem longitudinis ponantur, exprimetur iſta proprietas hac formula $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ quae ope ſubſtitutionis reducitur ad hanc $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ erit ergo $Z = \sqrt{(1 + pp)}$ et $dZ = \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; vnde erit $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; $Q = 0$, etc. ideoque valor ipſius V formulae $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ reſpondens erit $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}dx}$.

Coroll. 3.

526. Si eiusmodi curua quaeratur, quae aquae horizontaliter innatans ſecundum directionem axis, in quo abſciſſae x capiuntur, minimam pati debeat reſiſtentiam, tum iſta formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ minimam eſſe oportebit, haec vero formula ob $dy = p\,dx$, et $ds^2 = dx^2(1 + pp)$ abit in hanc $\int \frac{p^3\,dx}{1+pp}$. Cum igitur ſit $Z = \frac{p^3}{1+pp}$ erit $N = 0$, $P = \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2}$ atque valor ipſius V reſpondens erit $= -\frac{dP}{dx}$.

Coroll. 4.

527. Si igitur inter omnes omnino curuas ea deſideretur, quae maximam minimamue reſiſtentiam patiatur, vnica habebitur formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, cuius propterea valor ipſius V reſpondens debet eſſe $= 0$. Habebitur ergo $dP = 0$, et $P =$

Digitized by Google

et $P = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2} = m$ qua aequatione natura lineae quaeſitae exprimetur.

Coroll. 5.

528. Cum igitur ex hac aequatione fiat p conſtans, ſit $p = k$ erit $dy = kdx$; et $y = kx + c$ vnde fiet $k = \frac{y-c}{x} = p$. Qui valor in aequatione inuenta ſubſtitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y hanc $(y-c)^4 + 3x \cdot x(y-c)^2 = m(x^2 + (y^2 - c^2)^2$, quae quidem eſt pro linea recta ſeu pluribus rectis connexis.

Coroll. 6.

529. Quo poſito $x = 0$ fiat ſimul $y = 0$, debebit eſſe vel $c = 0$ vel $m = 1$. At ſi ſit $m = 1$ fiet $p = 1$ et $y = x$. ſin autem ponatur $c = 0$ habebitur $y^4 + 3x^2y^2 = m(x^2+y^2)^2$, hincque $y = \frac{\pm x\sqrt{2m}}{\sqrt{(3-2m \pm \sqrt{(9-8m)})}}$, quae aequatio quatuor lineas rectas complectitur.

Scholion.

530. Lemma hoc latiſſime patet, cum non ſolum iis problematis, quibus ex omnibus omnino curuis vna, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, deſideratur, reſoluendis inſeruiat; ſed etiam ad ea problemata ſit accommodatum, quibus non ex omnibus curuis poſſibilibus, ſed ex iis tantum, quae vna pluribusue quibuscunque proprietatibus aequaliter ſint praeditae vna maximi minimiue proprietate gaudens deſideratut. Multo amplior igitur extat huius lemmatis vſus, quam problematis Iſoperimetrici, prout id quidem adhuc eſt tractatum, quo methodus traditur ex omnibus curuis vel eius-

dem longitudinis vel aliam quandam proprietatem aequaliter poſſidentibus eam definiendi, quae aliqua maximi minimiue proprietate gaudeat. Nam praeterquam quod methodus haec vſitata vnicam tantum ſpectat proprietatem, quae in omnes curuas competat, ea quoque ratione ipſarum formularum integralium quae vel maximae minimaeue vel omnibus curuis communes eſſe debent, ingenti reſtrictioni eſt obnoxia; ceſſat enim eius vſus, ſtatim atque in alteram ſiue in vtramque formulam integralem differentialia ſecundi altiorisue cuiusdam gradus ingrediuntur, dum methodus hoc lemmate tradita ad cuiusuis gradus differentialia extenditur. At ſi ipſe curuae arcus vel aliae formulae integrales in ipſa quantitate Z contineantur, lemma allatum nullum amplius praeſtat vſum, ſed cum alia methodo coniungi debet, quam, quia eius vſus in ſequentibus non occurit, hic praetermiſimus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

531. *Inter omnes curuas* AM *cum axe* AP *et applicata* PM *eandem aream comprehendentes inuenire eam* AM, *quae circa axem* AP *vtrinque diſpoſita formet figuram* AMN *in aqua minimam maximamue patientem reſiſtentiam, ſi quidem in directione diametri* PA *progrediatur.*

Tab. XXIII. fig. 1.

Solutio.

Poſitis abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, quaeſtio huc redit, vt inter omnes curuas, in quibus $\int y\,dx$ eundem obtinet valorem, ea determinetur in qua $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ ſeu

ſeu $\int\frac{p^{3}dx}{1+pp}$ poſito $dy = p\,dx$, ſit maximum vel minimum. Priori igitur formulae $\int y\,dx$ reſpondet hic valor $V = 1$; poſteriori vero $\int\frac{p^{3}dx}{1+pp}$ eſt $V = -\frac{dP}{dx}$ exiſtente $P = \frac{3pp+p^{4}}{(1+pp)^{2}}$ et $\int P\,dp = \frac{p^{3}}{1+pp}$. Pro curua ergo quaeſita obtinebitur iſta aequatio $dP = \frac{dx}{a}$ atque $P = \frac{x+b}{a} = \frac{3pp+p^{4}}{(1+pp)^{2}}$. At ex eadem aequatione differentiali per p multiplicata $p\,dP = \frac{p\,dx}{a} = \frac{dy}{a}$ oritur integrando $Pp - \frac{p^{3}}{1+pp} = \frac{y+c}{a} = \frac{2p^{3}}{(1+pp)^{2}}$, vnde fiet $x = \frac{3app+ap^{4}}{(1+pp)^{2}} - b$ et $y = \frac{2ap^{3}}{(1+pp)^{2}} - c$ ex quibus formulis curua quaeſita non dificulter conſtruitur. Erit autem area $\int y\,dx = \frac{a^{2}P^{2}p}{2} - \frac{a^{2}Pp^{3}}{1+pp} + \frac{a^{2}p^{5}}{2(1+pp)^{2}} - cx + 2a^{2}\int\frac{p^{4}dp}{(1+pp)^{4}} = \frac{2a^{2}p^{5}}{(1+pp)^{4}} + 2a^{2}\int\frac{p^{4}dp}{(1+pp)^{4}} - cx$; reſiſtentia vero eſt ſeu $\int\frac{dy^{3}}{ds^{2}} = \frac{aPp^{3}}{1+pp} - a\int P^{3}dp = \frac{2ap^{3}}{(1+pp)^{3}} - 4a\int\frac{p^{4}dp}{(1+pp)^{4}}$; His autem aequationibus tam ea curua, quae maximam, quam quae minimam patitur reſiſtentiam continetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

532. Si ponatur $b = 0$ et $c = 0$, curua manebit eadem; alius enim tantum axis priori parallelus accipitur, aliudque initium abſciſſarum. Pro hoc itaque axi ſi ſumatur abſciſſa $x = \frac{3app+ap^{4}}{(1+pp)^{2}}$, erit applicata $y = \frac{2ap^{3}}{(1+pp)^{2}}$.

Coroll. 2.

533. Si ergo ſumatur $p = 0$, tum fiet tam $x = 0$ quam $y = 0$; in initio igitur abſciſſarum incidet curua in axem, atque ob $\frac{dy}{dx} = 0$, curua hoc loco ab axe tangetur.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 3.

534. Si ponatur $p = \infty$, fiet $x = a$ et $y = a$ hancobrem eo loco vbi eſt $x = a$, curua iterum in axem incidet, hic vero tangens curuae erit normalis ad axem.

Coroll. 4.

535. Deinde perſpicuum eſt tam abſciſſam quam applicatam vsque ad certos tandem terminos creſcere poſſe; obtinebit enim tam x quam y maximum valorem ponendo $p = \sqrt{3}$, hocque caſu fit $x = \frac{9}{8}a$ et $y = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$.

Coroll. 5.

536. Denique ſiue p affirmatiuum ſiue negatiuum habeat valorem, abſciſſa x manet eadem, at y negatiuum obtinet valorem ſumto p negatiuo, ex quo intelligitur axem in quo abſciſſae x capiuntur, ſimul eſſe diametrum curuae inuentae.

Scholion. 1.

Tab. XXIV. fig. 1.

537. Cum ſumto $x = \frac{3ap^2 + ap^4}{(1+pp)^2}$ ſit $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$, curua erit algebraica, atque per infinita puncta deſcriptu facilis. Sumatur enim axis AC directioni, ſecundum quam figura in aqua mouetur parallelus, atque conſtructio inuenta praebebit curuam triangularem AMBCDNA tres habentem cuſpides A, B, D ad angulos trianguli aequilateri ABD diſpoſitas, ac tres portiones inter cuſpides comprehenſae, AMB, AND et BCD erunt inter ſe aequales et ſimiles. Erit autem AC $= a$; AE $= \frac{9}{8}a$; et BE $=$ DE $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a$ tangentes vero in B et D cum recta BD conſtituant angulum 30 graduum. Cum igitur haec curua ſecun-

ſecundum directionem axis AC mota inter omnes alias eiusdem capacitatis tam maximam quam minimam, in aqua patiatur reſiſtentiam, intelligere licet portionem BM AND minimam eſſe paſſuram reſiſtentiam aream vero B CD maximam. Quare ſi curua deſideretur, quae inter omnes eandem aream continentes minimam patiatur reſiſtentiam; pro ea vel arcus AMB ſeu AND vel portio quaecunque erit accipienda. Pro nauibus autem commodiſſimum erit vtrique ſemiſſi partis anterioris accipere figuram DNAG ſeu BMAF ita vt D cadat in proram, et recta DG in ſpinam nauis; ſi enim figura DNA ad vtramque partem axis DG diſponatur habebitur figura quae in aqua ſecundum directionem GD inter omnes alias eandem aream DNAG continentes, et per puncta D et A tranſeuntes minimam patietur reſiſtentiam; atque haec eadem curua inter omnes alias per A et D ductas et eandem reſiſtentiam patientes maximam habebit aream DNAG. Quo autem natura, huius curuae nauibus maxime accommodata reſpectu axis DG inſpiciatur, ſit $DR = t$; $NR = u$; atque cum ſit $t = \frac{9}{8}a - x$ et $u = \frac{3\sqrt{3}}{8}a - y$, erit $DR = t = \frac{(3-pp)^2 a}{8(1+pp)^2}$, atque $NR = u = \frac{(p-\sqrt{3})^2(3p^2\sqrt{3}+2p+\sqrt{3})a}{8(1+pp)^2}$. Poteſt vero etiam aequatio prima non incongrue conſeruari, qua eſt $AP = GR = x = \frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2}$, et $PN = y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$; ex qua erit $dx = \frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^3}$ $dy = \frac{2appdp(3-pp)}{(1+pp)^3}$; atque $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = ds = \frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$; vnde fiet ipſe arcus $AN = s = \frac{2a(3pp-1)}{3(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a}{3}$, ita vt curua inuenta ſit rectificabilis; Reſiſtentia

autem quam patietur pars AN erit vt $\int\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{\frac{1}{2}ap+\frac{7}{8}ap^3+2ap^5}{(1+pp)^3} - \frac{a}{2}\int\frac{dp}{1+pp}$. Poſito igitur $p = \sqrt{3}$ proveniet tota curua AND $= \frac{4}{3}a$; eius vero ſubtenſa AD $= \frac{3\sqrt{3}}{4}a$; vnde arcus AND ſe habebit ad ſubtenſam AD vt 16 ad $9\sqrt{3}$, Reſiſtentia vero quam patietur tota curua DNA erit vt $\frac{11a\sqrt{3}}{32} - \frac{\pi a}{6}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt 1. Reſiſtentia curuae ergo ſe habet ad reſiſtentiam chordae AD vt 4 : 9 proxime. Haec curua AND praeterea in A habet tangentem axi GD parallelam, atque D curua cum axe facit angulum 60. graduum; in A et D vero radius oſculi eſt infinite paruus. Quomodo autem ſe haec curua AND reſpectu ſubtenſae AD habeat; ex parte BCD facilius perſpicitur vbi eſt CE $= \frac{3}{8}a$ BE $=$ DE $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a$, atque radius oſculi in puncto medio C eſt $= 2a$; vnde conſtructio practica facile concinnatur.

Coroll. 9.

538. Si igitur parti nauis anteriori tribuatur figura AND, exiſtente D prora et DG ſpina, nauis in directione GD progrediens non ſolum minimam patietur reſiſtentiam ſed inſuper ſi ita moueatur, vt chorda AD ad curſus directionem fiat normalis, tunc maximam patietur reſiſtentiam; quia curua AND congruit cum BCD.

Coroll. 7.

539 Hoc igitur ipſo haec figura ſe commendat ad nauibus optimam formam tribuendam; nam non ſolum requiritur vt nauis in directione ſpinae progrediens minimam offendat

Digitized by Google

offendat reſiſtentiam, ſed etiam vt in curſu obliquo reſiſtentia fiat vehementer magna.

Coroll. 8.

540. Reſiſtentia vero quam ſentiet figura AND ſi in directione ad chordam AD normali in aqua moueatur, erit ad hanc chordam normalis atque $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi a}{6}$. Si vero figura ſecundum directionem GD moueatur, atque ex vtraqne parte axis D G ſui ſit ſimilis erit reſiſtentia $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi a}{8}$

Coroll. 9.

541. Si ergo partis anterioris nauis aquae ſubmerſae ſingulae ſectiones horizontales habuerint eiusmodi figuram, vt earum ſemiſſes omnes aequales ſint vel ſimiles figurae DNA, tum nauis aptiſſimam habebit figuram ad aquae reſiſtentiam ſuperandam, atque ſimul comprehendet maximum ſpatium, cuius ratio in nauibus praecipue eſt habenda.

Scholion 2.

542. Quae autem hic ſunt allata proprie tantum ad figuras planas aquae horizontaliter innatantes extenduntur, neque ad corpora ſolida, ac naues niſi cum ſumma cautione poſſunt accommodari. Ita figura plana minimam patiens reſiſtentiam inter omnes aquicapaces, quae hic eſt inuenta in ſolidis locum non inuenit niſi omnes corporis natantis ſectiones horizontales ſint inter ſe aequales; et hancobrem ſi haec per experimenta confirmare lubuerit, aſſeres vbique eiusdem craſſitudinis adhibere conuenit, qui eandem reſiſtentiae legem tenebunt ac figurae planae ſeu craſſitiei euaneſcentis; hoc ſcilicet caſu latera aſſerum re-

 ſiſtentiam

ſiſtentiam excipientia ſitum tenent verticalem, ideoque ſub iisdem angulis in aquae particulas incurrunt, ſub quibus quaelibet ſectiones horizontales. At ſi figura ſubmerſa obliquum teneat ſitum ad aquam, ſeu ſi latera reſiſtentia aquae oppoſita non fuerint verticalia ſed ad horizontem inclinata, tum angulus incidentiae differt, ab illo angulo, ſub quo ſola ſectio horizontalis aquae occurrit; et hancobrem in eiusmodi corporibus, quamuis reſiſtentiae, quas ſingulae ſectiones horizontales ſentiunt, ſint cognitae, tamen reſiſtentia totalis exinde definiri nequit. Quo circa ne ex hic traditis vitioſae deriuentur concluſiones pro reſiſtentia corporum, conſultum eſt iudicium ſuspendere: quoad in ſequentibus resistentiam, quam quaecunque corpora in aqua perpetiuntur, ſimus determinaturi.

PROPOSITIO 54.
Problema.

Tab. XXV. fig. 1. 543. *Si figura quaecunque plana* BCA *ſitu verticali in aqua ſecundum directionem borizontalem* MD *promoueatur data cum celeritate, determinare reſiſtentiae, quam offendet tam quantitatem quam directionem mediam*

Solutio.

Sumatur verticalis AC pro axe, in quo ſit abſciſſa CP $= x =$ MQ, applicata PM $= y =$ CQ; atque arcus AM $= s$; erit ſinus anguli, quo curuae AMB punctum M in aquam incurrit $= \frac{dx}{ds}$, ex quo reſiſtentiae, quam elementum ds patietur, vis erit $= \frac{vdx^2}{ds}$, denotante v altitudinem celeritati qua figura promouetur, debitam, cuius vis

vis directio erit MN normalis ad curuam in M. Reſolvatur nunc haec vis in binas laterales, quarum alterius directio ſit horizontalis MP, alterius verticalis MQ, eritque vis horizontalis MP $= -\frac{vdx^3}{ds^2}$, et vis verticalis MQ $= +\frac{vdx^2dy}{ds^2}$. Hinc erit ſumma omnium virium horizontalium quas arcus AM patitur $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$, et ſumma virium verticalium $= +v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$; ita ſumtis his intregralibus vt euaneſcant facto s vel $y = 0$. Quare ſi ponatur $x = 0$, tum prodibunt vires quas tota curua AMB ab aqua patitur. Sit autem vis totalis horizontalis $-v\int\frac{dx^3}{ds^2}$ directio OH, vis totalis vero verticalis $+v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ directio OI, erit ſumendis momentis reſpectu puncti C, $-CH.v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -v\int\frac{xdx^3}{ds^2}$; atque $CI.v\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = v\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}$. Hinc igitur obtinetur $CH = \frac{\int xdx^3:ds^2}{\int dx^3:ds^2}$ et $CI = \frac{\int ydx^2dy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$; omnibus integralibus ita ſumtis vt euaneſcant poſito s ſeu $y = 0$ tumque facto $x = 0$. Effectus igitur reſiſtentiae totalis in hoc conſiſtit, vt figura retro vrgeatur in directione horizontali OH a vi $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$; ſimulque ſurſum vrgeatur in directione OI a vi $= v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$. Media ergo directio totius reſiſtentiae cadet in OK exiſtente IK : OI $= -\int\frac{dx^3}{ds^2} : \int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, vnde erit $IK = \frac{-OI\int dx^3\cdot ds^2}{\int dx^2dy\cdot ds^2} = \frac{-\int xdx^3:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$, ideoque $CK = \frac{\int(xdx+ydy)dx^2:ds^2}{\int dx^2dy\cdot ds^2}$. Anguli vero OKB tangens erit $= \frac{\int dx^2dy:ds^2}{-\int dx^3:ds^2}$, ex quibus poſitio mediae directionis reſiſtentiae OK cognoſcitur. Ipſa vero reſiſtentiae vis erit $= v\sqrt{((\int\frac{dx^3}{ds^2})^2 + (\int\frac{dx^2dy}{ds^2})^2)}$. Q. E. I.

 Co-

Coroll. 1.

544. Duplicem igitur reſiſtentia in figuram BCA exerit effectum, quorum alter conſiſtit in motu figurae retardando, atque oritur a vi horizontali $-v\int\frac{dx^2}{ds^2}$, cuius directio eſt OH.

Coroll. 2.

545. Altera autem vis ex reſiſtentia orta $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, cuius directio eſt verticalis ſecundum OI motum figurae non afficit, ſed eam ex aqua eleuat et quaſi leuiorem facit.

Coroll. 3.

546. Niſi igitur vis verticalis $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ euaneſcat vel negatiua fiat, figura dum mouetur ex aqua magis emerget, perinde ac ſi leuior eſſet facta; eoque magis eleuabitur ex aqua, quo celerius in aqua progreditur; decrementum ſcilicet grauitatis eſt vt quadratum celeritatis.

Coroll. 4.

547. Niſi autem vbique ſit vel $dy = 0$, quod evenit quando linea BMA abit in rectam verticalem, vel vsquam fiat dy negatiuum, vis iſta verticalis figuram ex aqua eleuans ſemper tenebit valorem affirmatiuum.

Coroll. 5.

548. Deinde haec vis verticalis, quia eius directio in proram cadit, figuram etiam ita inclinabit, vt prora eleuetur; puppis vero deprimatur, niſi vis horizontalis O H profundius ſit ſita quam centrum grauitatis, ideoque inclinationem contrariam efficiat.

Co-

Coroll. 6.

549. Vis autem horizontalis OH, qua motus figurae retardatur, eo erit minor, quo magis figura verſus B fuerit cuſpidata. Atque ſi inter omnes figuras eandem aream BAC comprehendentes ea quaeratur, quae ab aqua quam minime retardetur, ea ipſa reperietur figura, quae in prop. praecedente eſt inuenta. Perinde enim ſe habet reſiſtentia ſiue figura BMA horizontali ſitu promoueatur ſiue verticali.

Coroll. 7.

550. Maxime autem figura ex aqua eleuabitur, ſeu vis verticalis OI erit maxima, ſi linea curua BMA abeat in rectam, quae angulum cum horizontali BC conſtituat 54°, 44′ ſeu cuius coſinus eſt $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Scholion 1.

551. Haec propoſitio potiſſimum inſeruit ad reſiſtentiam definiendam, quam ſpina nauis in aqua progredientis perpetitur, ex ea enim intelligitur non ſolum quantum motus nauis a ſpinae reſiſtentia retardetur, ſed etiam quantum ipſa nauis a reſiſtentia aquae eleuetur et quaſi leuior reddatur. Si autem praeterea corpus in aqua motum ita fuerit comparatum, vt omnes ſectiones verticales in directione motus factae ſint inter ſe ſimiles et aequales, tum ex hac propoſitione quoque reſiſtentia colligi poteſt, ita ſi cylindrus aquae horizontaliter incubans ita moueatur, vt eius axis ad directionem motus ſit normalis tum curua AMB erit arcus circuli, atque hinc reſiſtentia innoteſcet. Deinde vero eadem haec propoſitio magnam habe-

be-

Digitized by Google

bebit vtilitatem in ſequentibus, vbi ſumus inueſtigaturi, quantam reſiſtentiam figura plana horizontalis quae in aqua ſecundum directionem obliquam progreditur, patiatur, hoc enim caſu reſiſtentia vtriusque ſemiſſis figurae ſeorſim eſt inueſtiganda, et ex vtraque media directio totius reſiſtentiae concludenda. Noſtro enim caſu perinde ſe habet reſiſtentia ſiue figura BMAC in ſitu verticali ſiue horizontali in aqua progrediatur.

Exemplum 1.

Tab. XXV. fig. 2.

552. Sit figura plana triangulum BAC quod in aqua ſecundum directionem MD progrediatur celeritate altitudini v debita; cuius reſiſtentia quamquam facile ex prop. 50 determinatur, tamen eam ope formularum hic inuentarum illuſtrationis cauſa ſumus inueſtigaturi. Sit itaque $BC = a$; $AC = b$, ob $CP = x$; $PM = y$ erit $b - x : y = b : a$ ideoque $y = a - \frac{ax}{b}$; $dy = -\frac{adx}{b}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$. Hinc erit vis horizontalis reſiſtentiae ſecundum directionem OH agens $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -\frac{b^2v}{a^2+b^2}\int dx$, quae ita integrata, vt euaneſcat poſito $y = 0$ ſeu $x = b$ erit $= \frac{b^2v(b-x)}{a^2+b^2}$, poſito ergo $x = 0$, erit vis horizontalis totalis $= \frac{b^2v}{a^2+b^2}$. Vis vero verticalis ſeu cuius directio eſt OI eſt $= v\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{-abv}{a^2+b^2}\int dx = \frac{abv(b-x)}{a^2+b^2}$, vnde prodit vis verticalis totalis $= \frac{ab^2v}{a^2+b^2}$. Ad poſitionem vero rectarum OH et OI inueniendam iam cognita ſunt $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-b^3}{a^2+b^2}$ et $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, quamobrem quaerenda ſunt $\int\frac{xdx^3}{ds^2}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}$. Eſt vero $\int\frac{xdx^3}{ds^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\int xdx = \frac{-b^4}{2(a^2+b^2)}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2} = \frac{-a^2}{a^2+b^2}$

ſcb

$\int(b-x)dx = \frac{aabb}{2(a^2+b^2)}$; integratione vti eſt praeceptum ita abſoluta vt integralia euaneſcant poſito $x=b$ tumque facto $x=0$. Hinc igitur erit CH $= \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$ AC, et CI $= \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ BC; punctum igitur O cadit in ipſum medium rectae AB. Quoniam autem poſita OK media directione reſiſtentiae, eſt IK : OI $= b : a =$ AC : BC, ex qua analogia perſpicitur mediam reſiſtentiae directionem OK eſſe normalem ad rectam AB: vis denique ipſa reſiſtentiae OK eſt $= \frac{bbv}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$: quae quidem omnia ex propoſ. 50 ſponte conſequuntur.

Coroll.

553. Cum igitur ſit IK : OI $= b : a$ erit IK $= \frac{bb}{2a}$, et CK $= \frac{aa-bb}{2a}$; angulus vero quem media directio reſiſtentiae OK cum horizontali BC conſtituit eſt $=$ ang. CAB, eiusve tangens eſt $= \frac{a}{b}$.

Exemplum 2.

554. Sit figura BCA ſemiſegmentum circulare ſeu BMA arcus circuli, cuius tangens in A ſit horizontalis, cuius ideo centrum cadet in E punctum rectae verticalis ACE. Ponatur BC $= a$; AC $= b$; et radius AE $= c$, erit $c^2 = a^2 + (c-b)^2$ ſeu $c = \frac{aa+bb}{2b}$. Poſito nunc CP $= x$, et PM $= y$, erit EP $= c-b+x$, indeque ex natura circuli $c^2 = y^2 + (c-b+x)^2$ ſeu $y = \sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}$ ex qua fit $y=0$, ſi eſt $x=b$. Erit autem porro $dy = \frac{-(c-b+x)dx}{\sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}}$ atque $ds = \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}}$; hincque $\frac{dx^2}{ds^2} = 1 - \frac{(c-b+x)^2}{cc}$. Quaerantur igitur ſequentia integralia hac Tab. XXV. fig. 3.

 condi-

Digitized by Google

conditione vt euaneſcant poſito $y=0$ ſeu $x=b$, in iisque ponatur poſt integrationem $x=0$ ſeu $y=a$. Reperietur autem $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-bb(3c-b)}{3cc}$; $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}=\int\frac{yydy}{cc}=\frac{a^3}{3cc}$. atque $\int\frac{xdx^3}{ds^2}=\int xdx-\int\frac{xdx(c-b+x)^2}{cc}=\frac{-b^3(4c-b)}{12cc}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}=\frac{a^4}{4cc}$. Ex his inuenitur $CH=\frac{b(4c-b)}{4(3c-b)}$ et $CI=\frac{3a}{4}$. Praeterea vero erit vis horizontalis $OH=\frac{bbv(3c-b)}{3cc}$ et vis verticalis $OI=\frac{a^3v}{3cc}$ quare media directio totius reſiſtentiae erit OK exiſtente $IK=\frac{b^3(4c-b)}{4a^3}$ ſeu $CK=\frac{3a^4-4b^3c+b^4}{4a^3}$; angulique OKI tangens erit $=\frac{a^3}{bb(3c-b)}$. Vniuerſa igitur reſiſtentia aequipollebit vi in directione OK vrgenti quae eſt $=\frac{v}{3cc}\sqrt{(a^6+b^4(3c-b)^2)}$.

Coroll. 1.

555. Cum ſit $c=\frac{aa+bb}{2b}$; erit $aa=2bc-bb$ ideoque $CK=\frac{12bbcc-16b^3c+4b^4}{4a^3}=\frac{bb(c-b)(3c-b)}{a^3}$. Si ergo OK producatur concurret ea cum AC in ipſo centro circuli E, eſt enim $\frac{CE}{CK}=\frac{a^3}{bb(3c-b)}=$ tang. ang. $OKI=\frac{OI}{KI}$.

Coroll 2.

556. Reſiſtentiae igitur media directio OE per ipſum circuli centrum E tranſit, atque cum recta AE angulum AEO conſtituet, cuius tangens erit $=\frac{bb(3c-b)}{a^3}=\frac{(3c-b)\sqrt{b}}{(2c-b)\sqrt{(2c-b)}}$, ſinus vero $=\frac{(3c-b)\sqrt{b}}{c\sqrt{(8c-3b)}}$.

Coroll. 3.

557. Quantitas vero totius reſiſtentiae, quae ſe in directione OE exerit eſt $=\frac{v}{3cc}\sqrt{(8b^3c^3-3b^4cc)}=$

bv

$\frac{bv}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$; aequatur ſcilicet ponderi cylindri aquei cuius altitudo eſt v, baſis vero $=\frac{b}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$ ducto in latitudinem ſeu craſſitiem figurae ſi quam habet.

Coroll. 4.

558. Quoniam directio reſiſtentiae, quam ſingula elementa patiuntur, eſt ad curuam normalis, ea per centrum E tranſibit, vnde ſponte ſequitur mediam directionem reſiſtentiae quam arcus BMA patitur, per centrum E tranſire debere.

Coroll. 5.

559. Si arcus AMB quadranti aequetur, fiet $b=c$, atque anguli AEO tangens erit $=2$: potentiae vero reſiſtentiae aequiualentis quantitas erit $=\frac{c\sqrt{5}}{3}$.

Coroll. 6.

560. At ſi arcus AMB abeat in ſemicirculum vt fiat $b=2c$, angulus AEO fiet rectus ſeu media reſiſtentiae directio erit horizontalis, vis autem totius reſiſtentiae prodibit $=\frac{4c}{3}$, prout iam ex ante §. 509 traditis colligere licet.

Scholion 2.

561. Cum igitur tam pro figura plana duabus partibus ſimilibus et aequalibus gaudente, ſi ſecundum directionem diametri horizontaliter promoueatur, quam pro figura plana in aqua verticaliter promota reſiſtentiam determinauerimus, ex inſtituto reuertemur ad figuras planas aquae in ſitu horizontali innatantes, atque reſiſtentiam etiam de-

 finiemus

Digitized by Google

finiemus, cum non directe ſecundum diametrum ſed oblique promouentur. Haec enim inueſtigatio multo difficilior eſt, quam praecedens cum reſiſtentia, quam figura ex vtraque diametri parte ob diſſimilem alliſionem ad aquam patitur ſit diſſimilis; et hancobrem tam directionem mediam reſiſtentiae quam ipſam reſiſtentiae quantitatem determinari oportet. Facile enim intelligitur in iſtiusmodi motu obliquo directionem mediam reſiſtentiae non in diametrum incidere, ſed diametrum alicubi ſecare, cum eaque certum quendam angulum conſtituere; vbi illud punctum in quo diameter et media directio reſiſtentiae ſe interſecant breuitatis ergo centrum reſiſtentiae appellabimus; quippe cuius cognitio ad effectum reſiſtentiae, in figura circum axem verticalem conuertenda ſumme eſt neceſſaria, Incipiemus autem hanc tractationem a figuris ſimplicioribus, et primo quidem rectangulum parallelogrammum conſideremus, quo perſpiciatur, quantum tam media directio reſiſtentiae quam ipſa reſiſtentia pro varia curſus obliquitate immutetur.

PROPOSITIO 55.
Problema.

562. *Si parallelogrammum rectangulum* FGIH *in aqua ſecundum directionem quamcunque obliquam* CL *promoueatur, inuenire reſiſtentiae quam patietur tum directionem tum quantitatem.*

Tab. XXV. fig. 4.

Solutio.

Sit rectanguli FGIH latitudo FG$=$HI$=a$; longitudo FH$=$GI$=b$; atque ducatur axis AE itemque per centrum figurae

figurae C tranſuerſa normalis BD, vt ſit $AC = \frac{1}{2}b$; et $BC = CD = \frac{1}{2}a$. Anguli autem obliquitatis curſus ACL ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$, poſito ſinu toto $= 1$, ita vt futurum ſit $m^2 + n^2 = 1$; celeritas autem qua rectangulum in directione CL progreditur, debita ſit altitudini v. Iam dum haec figura promouetur, latera bina FG et GI erunt reſiſtentiae expoſita, atque anguli quo latus FG in aquam impingit ſinus erit $= n$; anguli vero quo latus GI in aquam irruit ſinus eſt $= m$. Reſiſtentia igitur quam latus FG patietur erit $= n^2 a v$, eiusque directio incidet in axem ACE; reſiſtentia vero quam patietur latus GI erit $= m^2 b v$, eiusque directio erit recta DB. Reſiſtentia ergo aequiualet duabus viribus in puncto C applicatis quarum altera eſt $n^2 av$ et directionem habet CE alterius vero $m^2 bv$ directio eſt CB. Media conſequenter reſiſtentiae directio incidet in rectam CR exiſtente anguli RCE tangente $= \frac{m^2 b}{n^2 a}$; ipſiusque reſiſtentiae in directione CR vrgentis quantitas eſt $v\sqrt{(n^4 a^2 + m^4 b^2)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

563. In quacunque igitur directione parallelogrammum rectangulum progrediatur, media directio reſiſtentiae perpetuo tranſibit per eius punctum medium C, ſeu centrum reſiſtentiae incidet in centrum figurae C.

Coroll. 2.

564. Si igitur ſimul centrum grauitatis rectanguli in centrum figurae C incidat, tum reſiſtentia omni carebit vi figuram circa centrum grauitatis conuertendi; atque tota reſiſtentia impendetur ad motum ipſum alterandum.

Coroll. 3.

565. Si anguli LCA tangens ponatur $= v$ erit $\frac{m}{n} = v$, atque anguli RCE tangens erit $\frac{v^2 b}{a}$. Hancobrem reſiſtentiae directio directe contraria erit ipſi motui, ſi fuerit vel $v = 0$, hoc eſt ſi figura ſecundum directionem CA progrediatur, vel $v = \frac{a}{b}$ hoc eſt ſi figura ſecundum diagonalem HCG progrediatur.

Coroll. 4.

566. Sit angulus ACL $<$ ACG ſeu $v = \frac{a}{\alpha b}$ denotante α numerum vnitate maiorem, erit anguli ECR tangens $= \frac{a}{\alpha^2 b}$, vnde ſequitur angulum ECR fore minorem angulo LCA. Contra vero ſi fuerit angulus ACL $>$ ACG tum angulus ECR quoque maior erit quam angulus ACL.

Coroll. 5.

567. Differentiae autem angulorum ACL et ECR tangens eſt $= \frac{v^2 b - va}{a + v^3 b}$, vnde differentia horum angulorum prodibit maxima ſi capiatur v ex hac aequatione $bbv^4 - 2abv^3 - 2abv + aa = 0$.

Scholion.

568. Radices huius aequationis $b^2 v^4 - 2abv^3 - 2ab v + a^2 = 0$, eo modo reperiri poſſint, quo vulgo aequationes biquadratae ad cubicas reduci ſolent ſed hic commode accidit, vt cubica aequatio prodeat pura. Sit enim $a = k^b$, habebitur $v^4 - 2kv^3 - 2kv + kk = 0$ cuius factores ponantur hae aequationes $v^2 - \alpha v + \beta = 0$ et $v^2 - \delta v + \varepsilon$

$v+\varepsilon=0$; eritque $\alpha+\delta=2k$; $\beta+\varepsilon+\alpha\delta=0$; $\alpha\varepsilon+\beta\delta=2k$ et $\beta\varepsilon=k^2$. Sit $\alpha\delta=2b$; erit $\alpha-\delta=2\sqrt{(k^2-2b)}$; atque $\alpha=k+\sqrt{(k^2-2b)}$ et $\delta=k-\sqrt{(k^2-2b)}$. Quia autem porro eſt $\beta+\varepsilon=-2b$, et $\beta\varepsilon=k^2$; erit $\beta-\varepsilon=2\sqrt{(b^2-k^2)}$, et $\beta=-b+\sqrt{(b^2-k^2)}$ ac $\varepsilon=-b-\sqrt{(b^2-k^2)}$. Cum denique ſit $\alpha\varepsilon+\beta\delta=2k$ erit $k+kb=-\sqrt{(k^2-2b)(b^2-k^2)}$, vnde ſumendis quadratis oritur $k^2=-k^4-2b^3$, ſeu $b=-\frac{\sqrt[3]{k^2(k^2+1)}}{\sqrt[3]{2}}=-\frac{\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)}}{2}$

Dato autem b dabuntur α, β, δ; et ε per ſuperiores aequationes, indeque erit vel $v=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{(\frac{\alpha^2}{4}-\beta)}$ vel $v=\frac{\delta}{2}\pm\sqrt{(\frac{\delta^2}{4}-\varepsilon)}$. Factis autem ſubſtitutionibus reperitur vel $v=$

$$\frac{k+\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}\pm\sqrt{(2k^2-\sqrt[3]{4kk(k^2+1)}+2k\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}-2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+1)^2}-4k^2)})}}{2}$$

vel $v=\frac{k-\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}\pm\sqrt{(2k^2-\sqrt[3]{4kk(k^2+1)}-2k\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}+2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+1)^2}-4kk)})}}{2}$

quae ergo ſunt omnes quatuor radices huius aequationis biquadratae $v^4-2kv^3-2kv+kk=0$. Poſito igitur $\frac{a}{b}$ loco k habebuntur illi curſus obliqui, cum quibus directio reſiſtentiae minime congruit; ab hoc autem diſcrimine pendet inſignis illa nauium proprietas, qua curſus etiam verſus ventum dirigi poteſt, quam ob cauſam etiam iſtam diſcrepantiam quo caſu maxima euadit diligentius inueſtigandam cenſuimus.

PROPOSITIO 56.
Problema.

569. *Moueatur rhombus* ABED *aquae horizontaliter inſidens oblique ſecundum directionem* CL *ita tamen vt ſola bina* Tab. XXV. fig. 5.

bina latera anteriora AB *et* AD *reſiſtentiam ſuſtineant: definire reſiſtentiae tam directionem quam magnitudinem.*

Solutio.

Ponatur rhombi latus quoduis $AB = AD = a$; ſemidiameter $AC = b$, et alterius diagonalis ſemiſſis $BC = CD = c$, vt ſit $a^2 = b^2 + c^2$. Directio vero motus CL cum axe CA angulum conſtituat ACL cuius ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$ poſito ſinu toto $= 1$; celeritas denique qua rhombus in hac directione promouetur ſit debita altitudini v. Cum iam ſit anguli CAD ſinus $= \frac{c}{a}$ et coſinus $= \frac{b}{a}$. erit anguli ſub quo latus AD in aquam impingit ſinus $= \frac{nc+mb}{a}$, anguli vero ſub quo latus AB in aquam impingit ſinus $\frac{nc-mb}{a}$. Hinc reſiſtentia, quam latus AD patietur erit $= \frac{(nc+mb^3)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta FO, quae ad AD in eius puncto medio F normaliter inſiſtit. Simili modo reſiſtentia lateris AB erit $= \frac{(nc-mb)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta GO in puncto medio G rectae AB ad AB normalis. Centrum igitur reſiſtentiae erit punctum O, exiſtente $AO = \frac{aa}{2b}$ Réſoluatur vtraque reſiſtentiae vis in duas laterales, quae diagonalibus AE et BD ſint parallelae, erit reſiſtentia ſecundum AE vrgens $= \frac{cv(nc+mb)^2 + cv(nc-mb)^2}{a^2} = \frac{2cv(n^2c^2+m^2b^2)}{a^2}$ reſiſtentiae vero vis ſecundum directionem ipſi DB parallelam agens $= \frac{bv(nc+mb)^2 - bv(nc-mb)^2}{a^2} = \frac{4mnb^2cv}{a^2}$. Ex his media totius reſiſtentiae directio reperitur OR, quae cum axe AE angulum conſtituet RCE cuius tangens eſt $= \frac{2mnb^2}{n^2c^2+m^2b^2}$, ipſius vero

vero reſiſtentiae quantitas prodit $= \frac{2cv}{a^2}\sqrt{(n^4c^4 + 2m^2n^2b^2c^2 + m^4b^4 + 4m^2n^2b^4)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

570. In hac ergo figura quoque conſtans eſt centrum reſiſtentiae O, vtcunque curſus CL ab axe CA declinet, dummodo angulus ACL non ſuperet angulum DAD; hoc eſt dummodo ſit $\frac{m}{n} < \frac{c}{b}$.

Coroll. 2.

571. Si ergo figurae centrum grauitatis ſimul incidat in punctum O, tum reſiſtentia figuram non conuertet, ſed tantum eius motum progreſſiuum afficiet, eum vel retardando vel curſum inflectendo.

Coroll. 3.

572. Angulus autem EOR maior erit quam angulus ACL ſi fuerit $\frac{2mnb^2}{n^2c^2 + m^2b^2} > \frac{m}{n}$ hoc eſt ſi fuerit $2n^2b^2 - n^2c^2 > m^2b^2$, ſeu $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{(2b^2 - c^2)}}{b}$. Quia autem eſt $\frac{m}{n} < \frac{c}{b}$, perſpicuum eſt; ſi fuerit $b > c$ ſeu AC > CD tum angulum EOR ſemper maiorem fore angulo ACL.

Coroll. 4.

573. Si fiat $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, quo caſu ſolum latus AD reſiſtentiae erit expoſitum, tum anguli EOR tangens erit $= \frac{b}{c}$. Scilicet angulus EOR hoc caſu complementum erit anguli ACL ad rectum quod quidem ex ſe ſponte patet.

Digitized by Google

PROPOSITIO 57.
Problema.

Tab. XXVI. fig. 1. 574. *Si figura aquae innatans* AE *fuerit compoſita ex parallelogrammo rectangulo* HKNM *et duobus triangulis iſoſcelibus aequalibus* HAK *et* MEN *ſuper lateribus oppoſitis* HK *et* MN *conſtitutis, haecque figura in directione* CL *ad diametrum* AE *obliqua promoueatur, inuenire reſiſtentiae tum directionem tum magnitudinem.*

Solutio.

Ponantur primo in triangulo HAK, latus AK = AH = a; AP = b; HP = PK = c, ita vt ſit $a^2 = b^2 + c^2$. Deinde rectanguli HMNK longitudo MH ſeu KN ſit = $2f$, vel ducta diametro transuerſali BD ſit KD = DN = f; anguli autem obliquitatis curſus ACL ſinus ſit = m, coſinus = $n = V(1 - mm)$; qui angulus minor ſit quam angulus CEN, quo tria latera HA, AK et KN ſolum ſint reſiſtentiae expoſita, celeritas denique qua haec figura in directione CL progreditur debita ſit altitudini v. Conſideretur nunc primum reſiſtentia, quam ſola trianguli latera HA et AK patiuntur cuius media directio IS per propoſitionem antecedentem tranſit per punctum I, exiſtente AI = $\frac{aa}{2b}$, atque cum axe AE angulum CIS conſtituet, cuius tangens eſt = $\frac{2mnb^2}{n^2c^2 + m^2b^2}$ ipſa vero reſiſtentiae vis erit = $\frac{2cv}{a^2} V((n^2c^2 + m^2b^2)^2 + 4m^2n^2j^4)$; ſeu quod eodem redit reſiſtentia aequiualebit duabus viribus in I applicatis, quarum altera vrget verſus IC eſtque = $\frac{2cv(n^2c^2 + m^2b^2)}{a^2}$ altera directionem habet ad hanc normalem, eſtque =

4mnb

$\frac{4mnb^2cv}{a^2}$. His euolutis inquiramus in reſiſtentiam lateris KN, quod in aquam ſub angulo cuius ſinus eſt $= m$ impingit, eius igitur reſiſtentia eſt $= 2m^2fv$ cuius directio ad KN eſt normalis atque in ipſam DB incidit. Haec ergo reſiſtentia ſi cum priore, quam latera trianguli HA, AK ſufferunt coniungatur, praebebit centrum reſiſtentiae in O vt ſit $CO : IO = \frac{4mnb^2cv}{a^2} : 2m^2fv = 2nb^2c : ma^2f$; vnde fit $CI : CO = 2nb^2c + ma^2f : 2nb^2c$. Eſt vero $CI = f + b - \frac{a^2}{2b} = \frac{2bf + 2bb - aa}{2b}$; ideoque $CO = \frac{nbc(2bf + 2bb - aa)}{2nb^2c + ma^2f)}$. Tota ergo reſiſtentia ad duas vires in puncto O applicatas reducitur, quarum altera vrget in directione OC eſtque $= \frac{2cv(n^2c^2 + m^2b^2)}{a^2}$, alterius vero quae erit $= 2m^2fv + \frac{4mnb^2cv}{aa}$ directio ad illam eſt normalis. Hinc totius reſiſtentiae media directio eſt recta OR, quae cum axe angulum EOR conſtituit, cuius tangens $= \frac{m^2a^2f + 2mnb^2c}{n^2c^3 + m^2b^2c}$; atque ipſius reſiſtentiae quantitas erit $= \frac{2v}{a^2}\sqrt{((n^2c^3 + m^2b^2c)^2 + (m^2a^2f + 2mnb^2c)^2)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

575. In hac igitur figura ſitus centri reſiſtentiae O non eſt fixus, ſed pendet ab obliquitate curſus niſi ſit $f + b = \frac{a^2}{2b}$, quo caſu in C incidit. Nam ſi angulus ACL euaneſcit, tum punctum O incidet in ipſum punctum I, atque quo maior fit obliquitas curſus ACL, eo propius punctum O ad C accedit.

 Co-

Coroll. 2.

576. In huius modi igitur figura euitari nequit quin in curſu obliquo figura a reſiſtentia circa grauitatis centrum quandoque conuertatur, niſi eo caſu quo cadit O in C. Ad hanc ergo conuerſionem impediendam opus erit nouis viribus.

Coroll. 3.

577. Manente autem eodem angulo ACL obliquitatis curſus, angulus EOR quem media directio reſiſtentiae cum axe ſeu ſpina AE conſtituit, eo erit maior, quo longius fuerit parallelogrammum rectangulum HMNK.

Coroll. 4.

578. Eo magis autem angulus EOR excedet angulum ACL, quo magis haec quantitas $m^2na^2f + 2mn^2b^2c$ ſuperat hanc $mn^2c^3 + m^3b^2c$. Eo maior autem eſt iſte exceſſus; quo longior fuerit figurae pars media ſeu parallelogrammum rectangulum.

Scholion.

579. Ex his caſibus ſatis clare perſpicitur, quomodo de reſiſtentia quam quaecunque figura in aqua oblique promota patitur, iudicium ferri conueniat. Scilicet cum in nauibus quae vento propelluntur requiratur, vt curſus quam maxime in eam plagam inſtitui queat, vnde ventus venit, quantum iſta proprietas obtineatur ex differentia angulorum, quos directio curſus et media directio reſiſtentiae cum ſpina conſtituit, colligere licebit, quo maior enim

fuerit

fuerit iſta differentia, eo aptior erit nauis ad iſtum ſcopum conſequendum. Ex allatis autem intelligitur horum angulorum differentiam eo fore maiorem quo maior fuerit reſiſtentia laterum nauis reſpectu reſiſtentiae quam prora directe promota ſentit. Hancobrem primo naues ita conſtrui conuenit, vt ſecundum ſpinam directe promotae minimam ſentiant reſiſtentiam ;tum vero vt, ſi curſus tantillum ſuſcipiatur obliquus, reſiſtentia maxime augeatur; qui poſterior ſcopus obtinetur, ſi nauis fiat vehementer longa, eiusque latera figuram fere planam ſint habitura. Hanc itaque etiam ob cauſam pars nauium anterior, quae in curſu directo ſola reſiſtentiam patitur ita eſt conformanda, vt minimam patiatur reſiſtentiam, quantum quidem id reliquae circumſtantiae permittunt. Sed haec omnia tum in ſequenti capite tum vero in altero libro vberius exponentur. Quod autem ad ſitum centri reſiſtentiae attinet, quo de eo facilius iudicari queat, ſequentes propoſitiones afferre eſt viſum

PROPOSITIO 58.
Problema.

580. *Si figura* ABED *ex duobus aequalibus ſimilibusque ſegmentis circularibus conſtet, ſuper communi chorda* AE *vtrinque diſpoſitis; eaque figura in aqua promoueatur oblique ſecundum directionem* CL, *determinare reſiſtentiae tum directionem tum magnitudinem.* Tab. XXVI. fig. 2.

Solutio.

Sit F centrum arcus ADE, et G centrum arcus ABE, ponaturque $FD = GB = c$; $AC = EC = a$ $BC = CD = b$,

CD$=b$, erit FC$=$GC$=c-b$, atque ex natura circuli $a^2+(c-b)^2=c^2$ vnde fit $2bc=a^2+b^2$. Sit iam anguli obliquitatis curſus ACL ſinus $=m$, coſinusque $=n$, ac ducantur tangentes Mm et Nn parallelae directioni curſus CL, radiique MG et FN, erunt anguli MGB, NFD aequales angulo ACL, eorumque propterea ſinus $=m$, coſinusque $=n$. Cum itaque arcuum BM et DN ſinus ſit $=m$ et coſinus $=n$; arcuum vero AB et AD ſinus ſit $=\frac{a}{c}$ et coſinus $=\frac{\surd(c^2-a^2)}{c}$, erit arcus AM ſinus $=\frac{an-m\surd(c^2-a^2)}{c}$ et coſinus $=\frac{am+n\surd(c^2-a^2)}{c}$; arcus vero ADN ſinus $=\frac{an+m\surd(c_2-a^2)}{c}$ et coſinus $=\frac{n\surd(c^2-a^2)-ma}{c}$. Quare ſi ex A ad radios GM et FN, qui inter ſe ſunt paralleli ducatur perpendicularis APQ erit AP$=na-m\surd(c^2-a^2)=ma-m(c-b)$ et GP$=ma+n\surd(c^2-a^2)=ma+n(c-b)$. Simili modo erit AQ$=na+(c-b)$, et FQ$=n(c-b)-ma$. Sunt autem arcus AM et ADN eae figurae partes, quae ſolae reſiſtentiam patiuntur; ad reſiſtentiam igitur vtriusque arcus definiendam ſit celeritas, qua figura progreditur debita altitudini v. Reſiſtentiae autem arcus AM media directio tranſit per centrum arcus G, reduciturque ad duas potentias Gd, Ge, quorum illa Gd ad GM eſt normalis, haec vero Ge cum MG in directum iacet; eſt autem ex §. 554 vis Gd $=\frac{MP^2(3MG-M)v}{2MG^2}$ et vis Ge $=\frac{AP^3.v}{3MG^2}$. At eſt MP$=c-ma-n(c-b)$ et MG$=c$; ideoque 3MG$-$MP$=2c+ma+n(c-b)$ exiſtente AP$=na-m(c-b)$. Simili modo reſiſtentia, quam patitur arcus ADN, reducetur ad duas vires Fb et Fa in puncto F ſimiliter applicatas, vt ſit bF ad NF perpendicularis et a ſitum ſit in

in recta NF producta; eritque vis $Fb = \frac{NQ^2(3NF-NQ)v}{3NF^2}$ et vis $FA = \frac{AQ^3 \cdot v}{3NF^2}$, exiſtente $NQ = c + ma - n(c-b)$, et $NF = c$; $3NF - NQ = 2c = ma + n(c-b)$, atque $AQ = na + m(c-b)$. Reſoluantur hae vires in binas quarum alterae in FG incidant, alterae ad FG ſint normales, quod facile fit, dum angulorum $e G \varepsilon$ et $a F \alpha$ ſinus ſit $= m$, coſinusque $= n$. Reperitur vero vis $Gg = \frac{nv \cdot MP^2(3MG-MP) + mv \cdot AP^3}{3MG^2}$ et vis $G\varepsilon = \frac{nv \cdot AP^3 - mv \cdot MP^2(3MG-MP)}{3MG^2}$. Pari ratione eſt vis $Ff = \frac{nv \cdot NQ^2(3NF-NQ) + mv \cdot AQ^3}{3MG^2}$ et vis $F\alpha = \frac{nv \cdot AQ^3 + mv \cdot MQ^2(3NF-NQ)}{3MG^2}$. Ponatur $FC = GC = c - b = f$; erit $a^2 + f^2 + c^2$, atque $MP = c - ma - nf$; $NQ = c + ma - nf$; $3MG - MP = 2c + ma + nf$; $3NF - NQ = 2c - ma + nf$, atque $AP = na - mf$; ac $AQ = na + mf$. Hinc erit vis $Gg = \frac{v}{3cc}(2nc^3 - 3n^2c^2f - 2mna^3 + (nn-mm)f^3)$ et vis $G\varepsilon = \frac{v}{3cc}((n^2-m^2)a^3 + 2mnf^3 - 2mc^3 + 3m^2ac^2)$: Similiterque vis $Ff = \frac{v}{3cc}(2nc^3 - 3n^2c^2f + 2mna^3 + (nn-mm)f^3)$ et vis $F\alpha = \frac{v}{2cc}((n^2-m^2)a^2 - 2mnf^3 + 2mc^3 + 3m^2ac^2)$. Sit nunc OR media directio totius reſiſtentiae, erit $CR = \frac{mna^3f}{2nc^3 - 3nnc^2f + (nn-mm)f^3}$; viribusque ſuperioribus aequiualebunt duae vires Rr et RB in puncto R applicatae, eritque vis $Rr = \frac{2v}{3cc}(2nc^3 - 3nnc^2f + (nn-mm)f^3)$ et vis $RB = \frac{4mv}{3cc}(c^3 - nf^3)$. Vnde proueniet $CO = \frac{na^3f}{c^3 - nf^3}$. Anguli igitur ROC quem media directio reſiſtentiae cum axe AE conſtituit, tangens erit $\frac{2mc^3 - 2mnf^3}{2nc^3 - 3n^2c^2f + (nn-mm)f^3}$; atque ipſius reſiſtentiae quantitas erit $\frac{2v}{3cc}\sqrt{(4c^6 - 12n^3c^5f + 4n(nn-3mm)c^3f^3 + 9n^4c^4ff - 6nn(nn-mm)c^2f^4 + f^6)}$ Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

581. Locus igitur centri reſiſtentiae O eſt variabilis, pendetque ab obliquitate curſus ſeu angulo ACL. Quo maior enim ſit angulus ACL, eo propius punctum O ad C accedit.

Coroll. 2.

582. Si angulus ACL ſit infinite paruus, punctum O a C maxime erit remotum; erit enim diſtantia OC $= \frac{a^3 f}{c^3 - f^3} = \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$ propter $aa = cc - ff$. At ſi fiat $n = \frac{f}{c}$, quo caſu punctum M in A cadit, erit diſtantia minima $OC = \frac{a^3 ff}{c^4 - f^4} = \frac{aff}{cc+ff}$.

Coroll. 3.

583. Interuallum igitur, per quod centrum reſiſtentiae o vagatur, dum punctum M a B vsque ad A promouetur, eſt $= \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff} - \frac{aff}{cc+ff} = \frac{ac^3 f}{(cc+ff)(cc+cf+ff)} = a \left(\frac{f}{c} - \frac{ff}{cc} - \frac{f^3}{c^3} + \frac{2f^4}{c^4}\right)$ proxime: minus igitur eſt quam $\frac{af}{c}$.

Coroll. 4.

584. Si ſegmenta ABE et ADE abeant in ſemicirculos, tum fiet $f = 0$, hoc igitur caſu centrum reſiſtentiae O in ipſum punctum C cadit. Quo maior autem fuerit f, hoc eſt quo minora fuerint ſegmenta illa eo magis centrum reſiſtentiae O a C diſtat

Coroll. 5.

585. Vt differentia angulorum COR et ACL diſtinctius percipiatur, ponamus angulum ACL eſſe infinite

nite paruum, quo caſu fit $m =$ infinite paruo et $n = 1$, angulique A C L tangens $= m$. Anguli ergo C O R tangens erit $= \frac{2m(c^3 - f^3)}{2c^3 - 3ccf + f^3} = \frac{2m(c^2 + cf + ff)}{2c^2 - cf - ff} = \frac{2m(c^2 + cf + f^2)}{(c-f)(2c+f)}$; vnde ſe habebit angulus ACL ad angulum COR vt $2cc - cf - ff$ ad $2cc + 2cf + 2ff$.

Coroll. 6.

586. Si ergo obliquitas curſus ſeu angulus ACL fuerit vehementer exiguus, tum angulus COR maior erit angulo ACL, niſi ſit $f = 0$ quo caſu figura in integrum circulum abit. Semper enim ſi figura eſt integer circulus anguli ACL et COR ſunt aequales, atque puncta O et C coincidunt.

Coroll. 7.

587. Si obliquitas fiat maxima ſeu arcus AM euaneſcat, vt ſolus arcus ADE reſiſtentiae exponatur, tum fiet $m = \frac{a}{c}$ et $n = \frac{f}{c}$: atque anguli COR tangens erit $= \frac{a(c^4 - f^4)}{f(cc - ff)^2} = \frac{a(cc + ff)}{f(cc - ff)}$. Anguli igitur ACL tangens ſe habebit ad anguli COR tangentem vt $cc - ff$ ad $cc + ff$.

Coroll. 8.

588. Ex his intelligitur quo maior fuerit f reſpectu c, ſeu quo minora ſint ſegmenta ABE et ADE, eo magis pro quauis obliquitate excedere angulum COR angulum ACL.

Coroll. 9.

589. Si angulus ACL euaneſcit, tum ob $m = 0$ et $n = 1$, prodit totius reſiſtentiae vis $= \frac{2v(2c^3 - 3ccf + f^3)}{3cc}$

$=$

$= \frac{2v(c-f)(2c^2-cf-ff)}{3cc}$ at ſi obliquitas fiat maxima ſeu $m = \frac{a}{c}$ et $n = \frac{f}{c}$ tum prodit tota reſiſtentia $= \frac{4a^3v\sqrt{(cc+2ff)}}{3c^3}$.

Scholion.

590. Hanc figuram ex duobus ſegmentis circularibus compoſitam ideo potiſſimum hic ſum contemplatus, quod ad cognitionem reſiſtentiae nauium ſatis ſit idonea. Quamuis enim ſectiones horizontales nauium non admodum congruant cum iſta figura, tamen ſi praecedentes caſus ſimul in conſiderationem ducantur, non difficile erit pro quauis curſus obliquitate tam centri reſiſtentiae locum, quam mediam reſiſtentiae directionem aeſtimatione aſſignare; Satis enim manifeſtum eſt, quo magis figura fuerit cuſpidata, eo propius centrum reſiſtentiae verſus proram eſſe ſitum ceteris paribus. Eandem hanc etiam figuram Celeb. Ioh. Bernoulli in tractatu cui titulus eſt: Manoeuver des Vaiſſeaux, examini ſubiecit, atque peculiari modo in locum centri reſiſtentiae inquiſiuit, eo tantum caſu quo obliquitas curſus eſt quam minima, ſeu angulus ACL infinite paruus; cenſet autem hoc caſu centrum reſiſtentiae in eo puncto fore conſtitutum, vbi media directio reſiſtentiae quam arcus AB vel AD ſolus in curſu directo patitur, axem AE interſecat. At iſtud punctum non congruit cum noſtro puncto O, quando angulus ACL euaneſcit; Secundum methodum enim Bernoullianam reperitur interuallum $CO = \frac{af(2c+f)}{(c+f)^2}$, cum reuera ſit $CO = \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$. Ex quo intelligitur centrum reſiſtentiae, cum obliquitas curſus eſt infinite parua, ex reſiſtentia quam vtraque curuae pars in curſu directo patitur, definiri non poſſe, ſed reuera curſum obliquum in conſiderationem duci

ci oportere; quemadmodum in hac propoſitione a nobis eſt factum. Sed ſi aliae figurae praetet circulares fuerint propoſitae, tum reſiſtentia in curſu obliquo vix ac ne vix quidem poteſt determinari, ob calculum nimis prolixum: quocirca eiusmodi inveſtigationibus ſuperſedendum eſſe duxi. Tentabo autem tantum eo caſu, quo curſus obliquus minime a directo differt, locum centri reſiſtentiae et mediam reſiſtentiae directionem definire, quippe qui caſus facilius examini ſubiicitur, et a taediofis calculis quodammodo liberari poteſt.

PROPOSITIO 59.
Problema.

591. *Si figura aquae innatans conſtet ex duabus partibus* AMBE *et* ANDE *aequalibus et ſimilibus vtrinque ad axem* AE *diſpoſitis, eaque moueatur in directione* CL *quae cum axe* AC *conſtituat angulum* ACL *infinite paruum; determinare mediam directionem reſiſtentiae* OR, *ipſamque reſiſtentiae quantitatem.* Tab. XXVII. fig. 1.

Solutio.

Quia curſus obliquitas ponitur infinite parua eadem vtrinque figurae portio AMB et AND reſiſtentiam patietur, quae ſi curſus foret directus, reſiſtentiae eſſet expoſita; cum non ſolum eae partes quibus tum arcus AMB augeri, tum arcus AND diminui deberet, fiunt infinite paruae, ſedetiam ſub angulo infinite paruo in aquam impingunt, ita vt earum reſiſtentiam tuto negligere liceat. Ducta igitur ordinata MPN, ſit AP $=x$; PM $=$ PN

 $=y$,

$= y$, et arcus $AM = AN = s$. anguli vero ACL ſinus ponatur $= m$, coſinusque $= n$, erit m infinite paruum et propterea $n = 1$, celeritas autem qua figura progreditur debita ſit altitudini v: Ducantur iam ipſi LC parallelae m M et nN, quae directionem repraeſentabunt, qua puncta M et N in aquam impingunt; erit autem anguli AMm ſinus $= \frac{ndy + mdx}{ds} = \frac{dy + ndx}{ds}$, anguli autem ANn ſinus $= \frac{ndy - mdx}{ds} = \frac{dy - mdx}{ds}$. Reſiſtentia ergo, quam elementum ds in M ſufferet erit $= \frac{v(dy^2 + 2mdxdy)}{ds}$, eiusque directio erit normalis ad curuam Mp. Reſiſtentia vero quam elementum ds in N ſufferet erit $= \frac{v(dy^2 - 2mdxby)}{ds}$ in directione normalis Np. Elementum igitur ds in M vrgebitur indirectione MP vi $= \frac{vdxdy(dy + mdx)}{ds^2}$ at in directione axi AC parallela vi $= \frac{vdy^2(dy + 2mdx)}{ds^2}$. Simili modo elementum ds in N vrgebitur, in directione NP vi $= \frac{vdxdy(dy - 2mdy)}{dc^2}$. et in directione axi AC parallela vi $= \frac{vdy^2(dy - 2mdx)}{ds^2}$. Summa ergo virium qua ambo elementa coniunctim in directione AC vrgentur eſt $= \frac{2vdy^3}{ds^2}$: at exceſſus, quo indirectione MN ſollicitantur $= \frac{4mvdx^2dy}{ds^2}$. Sit nunc oO media reſiſtentiae directio, ductoque ex o ad AC perpendiculo ov, erit integralibus vsque ad B et D ſumtis $ov = \frac{4mv\int\frac{ydy^2dx}{ds^2}}{2v\int\frac{dy^3}{ds^2}} = \frac{2m\int ydy^2dx:ds^2}{\int dy^3:ds^2}$ atque $Av = \frac{4mv\int\frac{xdx^2dy}{ds^2}}{4mv\int\frac{dx^2dy}{ds^2}} = \frac{\int xdx^2dy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$. Porro ſi oO eſt media directio reſiſtentiae, erit $ov : vO = 2m\int\frac{dx^2dy}{ds^2} : \int\frac{dy^3}{ds^2}$, vnde fit $vO = \frac{\int ydy^2dx:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$ atque $AO = \frac{\int(xdx + ydy)dxdy\ ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$ quae expreſſio

expreſſio determinat locum centri reſiſtentiae O. Tota igitur reſiſtentia reducitur ad duas vires in puncto O applicatas, quarum altera eſt $= 2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$ agens in directione Os; altera vero eſt $= 4mv\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, cuius directio eſt Or ad AE normalis. Ipſa denique media directio OR cum axe AE angulum conſtituet EOR cuius tangens eſt $= \frac{2m\int dx^2dy:ds^2}{\int dy^3:ds^2}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

592. Hinc patet locum centri reſiſtentiae O omnino eſſe diuerſum ab eo, qui ſecundum modum ante indicatum (590) reperitur, per eum enim prodit $AO = \frac{\int(xdx+ydy)dy^2.ds^2}{\int dy^2dx:ds^2}$, cum tamen reuera ſit $AO = \frac{\int(xdx+ydy)dxdy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$.

Coroll. 2.

593. Angulus igitur ROE pariter erit infinite paruus, rationemque habebit ad angulum ACL vti ſe tenet $2\int\frac{dx^2dy}{ds}$ ad $\int\frac{dy^3}{ds^2}$; quae ergo ratio erit finita. Anguli enim infinite parui ſunt vt eorum tangentes vel ſinus.

Coroll. 3.

594. Reſiſtentiae ergo vis, quae agit ſecundum directionem axis AE aequalis eſt illi reſiſtentiae, quam pateretur eadem figura ſi curſu directo ſecundum directionem axis CA moueretur.

Scholion 1.

595. Ex ſolutione ſponte intelligitur, qua conditione omnia integralia, quae occurrunt ſint accipienda. Scilicet primo omnes integrationes ita ſunt inſtituendae, vt

omnia integralia euaneſcant poſito vel x vel $y = 0$. Deinde ad maximam figurae latitudinem eſt reſpiciendum, quae ſi eſt BD, poni debet $x = AC$ vel $y = BC$; quoniam ea pars figurae ſolum reſiſtentiam patitur quae ſita eſt inter proram A et maximam figurae latitudinem BD.

Coroll. 4.

596. Cum reſiſtentia ſecundum directionem AE ſit vt $\int \frac{dy^3}{ds^2}$; atque anguli ROE tangens $= \frac{2m\int dx^2 dy : ds^2}{\int dy^3 . ds^2}$, intelligitur, quo figurae directe promotae minor fuerit reſiſtentia, eo magis angulum ROE eſſe ſuperaturum angulum ACL.

Coroll. 5.

597. Pendet autem integratio $\int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ab integratione $\int \frac{dy^3}{ds^2}$: cum enim ſit $dx^2 + dy^2 = ds^2$ erit $\int \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \int \frac{dy^3}{ds^2} = y$; ideoque $\int \frac{dx^2 dy}{ds^2} = y - \int \frac{dy^3}{ds^2}$; vnde fit anguli EOR tangens $= \frac{2my}{\int dy^3 . ds^2} - 2m = \frac{2m . BC}{\int dy^3 . ds^2} - 2m$.

Coroll. 6.

598. Inter omnes igitur figuras per puncta A et B tranſeuntes, ea pro data obliquitate ACL maximum angulum EOR producet, quae in curſu directo minimam patitur reſiſtentiam.

Coroll. 7.

599. Deinde quod ad locum centri reſiſtentiae O attinet, cum ſit $AO = \frac{\int (xdx + ydy) dx dy : ds^2}{\int dx^2 dy ds^2}$ erit $AO = \frac{\int (xdx + ydy) dx dy \cdot ds^2}{BC - \int dy^3 . ds^2}$. Quo minor ergo eſt reſiſtentia figurae

in

in curſu directo, eo propius centrum reſiſtentiae O ad proram A erit ſitum manente numeratore $\int \frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2}$.

Exemplum 1.

600. Sit pars figurae anterior reſiſtentiam excipiens triangulum iſoſceles BAD, in quo ſit $AC = a$; $BC = CD = b$, et $AB = AD = c = \sqrt{(a^2+b^2)}$. Directio vero curſus ſit CL, anguliquc ACL qui eſt infinite paruus, ſinus $= m$; et celeritas debita altitudini v. Iam poſito $AP = x$; $PM = PN = y$, erit $y = \frac{bx}{a}$; et $dy = \frac{bdx}{a}$; atque $ds = \frac{cdx}{a}$: Sit nunc O centrum reſiſtentiae, et OR media directio reſiſtentiae, erit ob $\int \frac{dx^2dy}{ds^2} = \int \frac{abdx}{cc} = \frac{a^2b}{cc}$; $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \int \frac{b^3dx}{acc} = \frac{b^3}{cc}$; $\int \frac{xdx^2dy}{ds^2} = \int \frac{abxdx}{cc} = \frac{a^3b}{2cc}$; atque $\int \frac{ydxdy^2}{ds^2} = \int \frac{b^3xdx}{acc} = \frac{ab^3}{2cc}$; diſtantia $AO = \frac{a^3b+ab^3}{2a^2b} = \frac{cc}{2a}$; vnde patet centrum reſiſtentiae O in idem axis AC punctum incidere, in quo recta GO, quae ad AB eſt normalis eamque biſecat, rectae AC occurrit, prouti ex praecedentibus iam conſtat. Deinde anguli COR tangens eſt $= \frac{2ma^2}{b^2}$. ita vt ſe habeat angulus ACL ad angulum COR vti b^2 ad $2a^2$; quoties igitur fuerit $2a^2 > b^2$ ſeu $\frac{BC}{AC} < \sqrt{2}$, ſiue angulus BAC minor quam 54°, 45′, toties angulus COR excedet angulum ACL. Vis denique reſiſtentiae agens in directione CO eſt $= \frac{2b^3v}{cc}$; atque vis qua in directione ad OC normali ſollicitabitur erit $= \frac{4ma^2bv}{cc}$.

Tab. XXVII. fig. 2.

Exempl.

Exemplum 2.

601. Conſtet figura ex duobus ſegmentis circularibus ABE, ADE aequalibus et ſimilibus ſitque $AC = a$; $BC = CD = b$; atque radius circuli ex quo haec ſegmenta ſunt deſumta ſit $= c$. ponatur autem breuitatis cauſa $c - b = f$, vt ſit $cc = a^2 + ff$. Porro ſit CL directio curſus angulique ACL, qui ponitur infinite paruus, ſinus $= m$, et celeritati altitudo debita $= v$. Iam cum ſit $AP = x$; $PM = PN = y$, erit ex natura circuli $x = a - \sqrt{(c^2 - (f+y)^2)}$; $dx = \frac{(f+y)dy}{\sqrt{(c^2-(f+y)^2)}}$ et $ds = \frac{c\,dy}{\sqrt{(c^2-(f+y)^2)}}$; vnde ſequentia integralia reperientur $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \int \frac{ccdy-(f+y)^2dy}{cc} = b + \frac{f^3}{3cc} - \frac{c}{3} = \frac{2c^3-3ccf+f^3}{3cc} = \frac{(c-f)^2(2c+f)}{3cc}$ atque $\int \frac{dx^2dy}{ds^2} = c - f - \frac{(c-f)^2(2c+f)}{3cc} = \frac{(c-f)(cc+cf+ff)}{3cc} = \frac{c^3-f^3}{3cc}$. Deinde eſt $\int \frac{xdx^2dy}{ds^2} = \frac{a(c^3-f^3)}{3cc} - \int \frac{(f+y)^2dy\sqrt{(cc-(f+y)^2)}}{cc}$ atque $\int \frac{y\,dx\,dy^2}{ds^2} = \int \frac{(f+y)ydy}{cc} \sqrt{(cc-(f+y)^2)}$; vnde erit $\int \frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = \int \frac{a(c^3-f^3)}{3cc} - \frac{f}{cc}(f+y)dy\sqrt{(cc-(f+y)^2)} = \frac{a(c^3-f^3)}{3cc} - \frac{a^3f}{3cc} = \frac{ab}{3}$. Ex his oritur $AO = \frac{abcc}{c^3-f^3} = \frac{acc}{cc+cf+ff}$ atque $CO = \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$ vt ſupra (582). Anguli autem COR, quem media directio reſiſtentiae OR cum axe AC conſtituit tangens eſt $= \frac{2m(cc+cf+ff)}{(c-f)(2c+f)}$ vti ſupra (585.)

Exemplum 3.

Tab. XXVII. fig. 3. 602. Sit figura aquae inſidens ellipſis ABED cuius ſemiaxis AC ſit $= a$; alter $BC = CD = b$ atque CL curſus directio infinite parum diſſidens ab axe AC, ita vt anguli ACL ſinus m ſit infinite paruus; altitudo vero celeritati, qua haec figura promouetur, debita ſit $= v$. Iam poſitis

poſitis abſciſſa $AP = x$, applicatis $PM = PN = y$, erit $y = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - xx)}$, ſiue $x = a - \frac{a}{b} \sqrt{(bb - yy)}$; hinc igitur fit $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{(bb-yy)}}$ et $ds^2 = \frac{dy^2(b^4 + (a^2-b^2)yy)}{bb(bb-yy)}$. Quare integralia, quibus opus eſt ita ſe habebunt $\int \frac{dx^2dy}{ds^2} = \int \frac{a^2y^2dy}{b^4+(aa-bb)yy} = \frac{aab}{aa-bb} - \frac{a^2b^4}{aa-bb} \int \frac{dy}{b^4+(aa-bb)yy}$ vbi duo caſus ſunt conſiderandi, prout fuerit $a > b$ vel $a < b$; ſi enim $a > b$ ſeu $AC > BC$ prouenit $\int \frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{a^2b}{aa-bb} - \frac{a^2b^2}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$ at ſi $a < b$ erit $\int \frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{a^2b^2}{2(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{b-\sqrt{(bb-aa)}} - \frac{a^2b}{bb-aa} \right. = \frac{a^2b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a} - \frac{a^2b}{bb-aa} \right.$. Quia autem eſt $\int \frac{dy^3}{ds^2} = b - \int \frac{dx^2dy}{ds^2}$ erit eo caſu, quo eſt $a > b$, $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{-b^3}{aa-bb} + \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$ caſu vero quo eſt $a < b$ erit $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3}{bb-aa} - \frac{a^2b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a} \right.$. Deinde cum ſit $\frac{xdx^2dy}{ds^2} = \frac{a^3y^2dy - \frac{a^2}{b}y^2dy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$, atque $\frac{ydxdy^2}{ds^2} = \frac{abyydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$; erit $\int \frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = a \int \frac{a^2y^2dy}{b^4+(aa-bb)yy} - \frac{a}{b} \int \frac{(aa-bb)yydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$. Eſt vero $\int \frac{(aa-bb)yydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy} = \frac{\pi}{4} \frac{b^3(a-b)^2}{(aa-bb)}$ denotante $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum in circulo. Quamobrem ſi $a > b$ erit $\int \frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = \frac{a^3b}{aa-bb} - \frac{a^3b^2}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$

$-\frac{\pi ab(a-b)^2}{4(aa-bb)}$; at ſi $a<b$ erit $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = \frac{a^3b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right) - \frac{a^2b}{bb-aa} + \frac{\pi ab(a-b)^2}{4(aa-bb)}$. Centrum itaque reſiſtentiae ſitum erit in O vt ſit $AO = a - \frac{\pi ab(a-b)^2}{4a^2b - \frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{ A tang. }\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}}$; ideoque $CO = \frac{\pi(a-b)^2}{4a - \frac{4ab}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{ A tang. }\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}}$; caſu quo eſt $a>b$. At caſu quo eſt $a<b$ erit $CO = \frac{-\pi(b-a)^2}{\frac{4ab}{\sqrt{(bb-aa)}}\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)-4a}$ $= \frac{\pi(b-a)^2\sqrt{(bb-aa)}}{4ab\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)-4a\sqrt{(bb-aa)}}$. Anguli denique COR tangens erit $= \frac{2ma^2\sqrt{(aa-bb)}-2ma^2b\text{ A tang. }\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}}{-bb\sqrt{(aa-bb)}+a^2b\text{ A tang }\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}} =$ $\frac{-2ma^2\sqrt{(bb-aa)}+2ma^2b\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)}{bb\sqrt{(bb-aa)}-a^2b\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)}$, quarum expreſſionum, illa valet ſi $a>b$, haec vero ſi $a<b$. Innoteſcit igitur media directio reſiſtentiae OR quam figura propoſita elliptica ſecundum directionem CL promota ſentit.

Coroll. 1.

603. Si integrationes, quae tum a quadratura circuli tum hyperbolae pendent, per ſeries abſoluantur, erit $CO = \frac{\pi(a-b)^2}{4a\left(\frac{aa-bb}{3bb}-\frac{(aa-bb)^2}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^3}{7b^6}-\text{etc.}\right)}$ atque anguli COR tangens $= \frac{2m\left(\frac{aa-bb}{3bb}-\frac{(aa-bb)^2}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^3}{7b^6}-\text{etc.}\right)}{-\frac{bb}{aa}+1-\frac{(aa-bb)}{3bb}+\frac{(aa-bb)^2}{5b^4}-\frac{(aa-bb)^3}{7b^6}+\text{etc.}}$ quae formulae aeque valent ſiue ſit $a>b$ ſiue $a<b$.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 2.

604. Cum ſit $-\frac{bb}{aa}+1=\frac{aa-bb}{aa}$, erit anguli COR tangens $=\frac{2m\left(\frac{1}{3bb}-\frac{(aa-bb)}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^2}{6b^6}-\text{etc.}\right)}{\frac{1}{aa}-\frac{1}{3bb}+\frac{aa-bb}{5b^4}-\frac{(aa-bb)^2}{7b^6}+\text{etc.}}$ ſimilique modo fiet interuallum $CO=\frac{\pi(a-b)}{4a(a+b)\left(\frac{1}{3bb}-\frac{(aa-bb)}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^2}{7b^6}-\text{etc.}\right)}$

Coroll. 3.

605. Si ellipſis proxime ad circulum accedat ita vt prope ſit $b=a$, exiſtente $b=a-dw$, erit ob terminos euaneſcentes $\frac{3\pi dw}{8}=CO$; atque hoc caſu etiam fit anguli COR tangens $=m$, ſeu angulus COR aequalis erit angulo ACL.

Scholion 2.

606. Integratio formulae differentialis $\frac{(a^2-b^2)yydy\sqrt{(bb-yy)}}{a^4+(aa-bb)yy}$, quae in hoc exemplo occurrit notatu eſt digna, eo quod integrale eo caſu, quo ponitur $y=b$, contra omnem expectationem finite et tam ſimplici forma exprimitur. Si enim integrale indefinitum deſideraretur, tum maxime prolixa et intricata expreſſio inueniretur, ex qua etiam difficillimum foret integrale pro caſu $y=b$ exhibere. Peculiari igitur in hac integratione vſus ſum modo, quo ſtatim pro eo ſolum caſu, quo eſt $y=b$, integrale prodit, cuius fundamentum in hoc conſiſtit; quod ſit $\int y^{m+2}dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}=\frac{(m+1)bb}{m+n+3}\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$, eo caſu, quo ponitur $y=b$. Hinc igitur reperitur $\int(\alpha+\beta y^2+\gamma y^4+\delta y^6+\varepsilon y^8+\text{etc.})y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}=(\alpha+\beta\frac{(m+1)bb}{m+n+3}+\frac{\gamma(m+1)(m+3)b^4}{(m+n+3)(m+n+5)}$

+

$+\frac{(m+1)(m+3)(m+5)b^6}{(m+n+3)(m+n+5)(m+n+7)} + \text{etc}\,)\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$. Cum nunc ſit $\frac{1}{cc+yy} = \frac{1}{cc} - \frac{yy}{c^4} + \frac{y^4}{c^6} - \frac{y^6}{c^8} + \text{etc.}$ erit $\frac{\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy}$

$$=\left(\frac{1}{cc} - \frac{(m+1)b^2}{(m+n+3)c^4} + \frac{(m+1)(m+3)b^4}{(m+n+3)(m+n+5)c^6} - \frac{(m+1)(m+3)(m+5)b^6}{(m+n+3)(m+n+5)(m+n+7)c^8} + \text{etc.}\right)$$

$\int y^m dy\,(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ eo quidem caſu quo ſit $y=b$. Series autem iſta, quanquam in infinitum progreditur, tamen ad formam finitam poteſt reduci poſito enim $\frac{b}{c}=z$, ſumma illius ſeriei eſt $=\frac{(m+n+1)c^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}}}{b^{m+n+1}}$

$\int\frac{z^{m+n}dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}}$ integrali hoc ita ſumto vt euaneſcat poſito $z=0$. Poſito igitur $\int\frac{z^{m+n}dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}} = C$ erit

$$\int\frac{y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy} = \frac{(m+n+1)Cc^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}}}{b^{m+n+1}}\int y^m$$

$dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ Quando autem m eſt numerus par et n impar, tum $\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ vlterius reduci poteſt ad $\int\frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, cuius integrale caſu quo $y=b$ ſit $\frac{\pi}{2}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter eſt $=1$. Erit autem

$$\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots n}{(m+2)(m+4)(m+6)\cdots(m+n+1)}b^{m+n+1}$$

vnde denique habetur $\int\frac{y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy} =$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots n}{(m+2)(m+4)(m+6)\cdots(m+n+1)}\cdot\frac{(m+n+1)}{c^m}$$

Digitized by Google

$c^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}}$ C existente $C = \int \frac{z^{m+n}dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}}$, et $z = \frac{b}{c}$, ita vt ob *m* numerum parem *n* vero imparem C ſit quantitas algebraica. His igitur ad noſtrum caſum applicatis, quo poſito $\frac{b^4}{aa-bb} = cc$, formula noſtra tranſit in hanc $\int \frac{yydy\sqrt{(bb-yy)}}{cc+yy}$, vnde fit $m = 2$ et $n = 1$. Erit ergo $C = \int \frac{z^2 dz}{(1+zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2+zz}{\sqrt{(1+zz)}} - 2 = \frac{2cc+bb}{c\sqrt{(bb+cc)}} - 2$, ideoque integrale deſideratum $= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4(2cc+bb-2c\sqrt{(bb+cc)}) = \frac{\pi}{4}(\sqrt{(bb+cc)}-c)^2 = \frac{\pi bb(a-b)^2}{4(aa-bb)}$; prouti ſupra poſuimus.

PROPOSITIO 60.

Problema.

607. *Si figura plana rectilinea* ABCDEF *fuerit circulo inſcriptibilis, tum ſecundum quamcunque directionem* OL *in aqua moueatur, media directio reſiſtentiae perpetuo per centrum circuli* O *tranſibit.* Tab. XXVIII. fig. 4.

Demonſtratio.

Quoniam reſiſtentiae directio, quam latus quodcunque figurae ab aqua ſuffert, ad ipſum latus in ſuo puncto medio eſt normalis, atque quodlibet latus ſit chorda circuli circumſcripti; directio reſiſtentiae cuiusuis lateris per centrum circuli circumſcripti O tranſibit. Quotcunque igitur latera figurae reſiſtentiam excipiant, ſingulorum directio reſiſtentiae per centrum O tranſibit; et hancobrem harum ſingularum reſiſtentiarum media directio per idem centrum O tranſeat neceſſe eſt. Reſiſtentia ergo

go totalis, quam figura propoſita ſecundum quamcunque directionem promota patitur, per centrum circuli circumſcripti O tranſit. Q. E. D.

Coroll. 1.

608. Si igitur huius figurae centrum grauitatis ſimul in centro circuli circumſcripti O fuerit ſitum, tum reſiſtentia nullam habebit vim ad figuram conuertendam, in quacunque directione etiam figura progrediatur.

Coroll. 2.

609. Intelligitur etiam, ſi modo anterior figurae pars circulo fuerit inſcriptilis, neque curſus obliquitas ſit tanta, vt poſteriores figurae partes reſiſtentiam excipiant; tum pariter reſiſtentiae mediam directionem per centrum circuli prorae circumſcripti O eſſe tranſituram.

Coroll. 3.

610. Si ergo huiusmodi figura diametro fuerit praedita, diameter per centrum circuli circumſcripti tranſibit hocque caſu centrum reſiſtentiae fixum habebit ſitum in ipſo centro circuli circumſcripti.

Scholion.

611. Inſignis haec eſt proprietas figurarum rectilinearum circulo inſcriptibilium, quod in iis centrum reſiſtentiae conſtantem obtineat ſitum, quantumvis curſus ſit obliquus, dum in aliis figuris ſitus centri reſiſtentiae pro varia curſus obliquitate tantopere mutetur: videturque iſta pro-

proprietas propria figurarum circulo inſcriptibilium; ita vt in alias figuras non competat. Superfluum autem foret plures alias figuras planas, aquae innatantes conſiderare, cum ex allatis facile ſit iudicium de reſiſtentia cuiuscunque figurae oblatae formare. Hancobrem miſſa reſiſtentia, quam tantum lineae ſiue rectae ſiue curuae tanquam termini figurarum planarum in aqua patiuntur, progrediamur ad caput ſequens in eoque ad figuras ſolidas, quae proprie ad inſtitutum noſtrum pertinent, inueſtigaturi quantam reſiſtentiam quodcunque corpus in aqua promotum ſufferat, quae reſiſtentia ex ſuperficie corporis aquae ſubmerſa et in aquam impingente deriuari debet. Simili ſcilicet modo, quo hactenus ſumus vſi, ſuperficies omnis conſtare concipitur ex innumeris planis, quorum ſingula reſiſtentiam patiuntur ipſis ſuperficiebus et quadrato anguli incidentiae coniunctim proportionalem. Ita ſi ſuperficies plana cuius area ſit $= aa$ in aquam impingat ſub angulo cuius ſinus eſt m, velocitate debita altitudini v tum vis reſiſtentiae aequiualebit ponderi cylindri aquei cuius baſis eſt a^2 et altitudo $= m^2 v$, directio vero reſiſtentiae erit ad ipſam ſuperficiem planam normalis, atque per eius centrum grauitatis tranſit, prout in initio huius capitis ſatis eſt oſtenſum. Eiusmodi autem corpora tantum conſiderabo, quae plano diametrali verticali gaudeant, quo in duo fruſta aequalia et ſimilia diſpeſcantur, huius modi enim corpora pro noſtro inſtituto tantum conſiderari merentur. Praeterea curſus directionem ponemus directam, hoc eſt, quae in ipſo plano diametrali ſit ſita; qua adiunctione inquiſitio reſiſtentiae ſit facilior, cum directio reſiſtentiae ſponte ſe praebeat, quippe quae pariter

ter in planum diagonale incidit. Tantum igitur ſupereſt, vt quantitas reſiſtentiae, et ipſa eius, quam plano diagonali habet, poſitio definiatur. Primum quidem pro hoc caſu propoſitionem maxime generalem praemittemus, quo deinceps eo facilius ad quasuis figurarum ſpecies progredi liceat.

Caput

Digitized by Google

Caput Sextum
DE
RESISTENTIA, QVAM CORPORA QVAECVNQVE IN AQVA MOTV DIRECTO LATA PATIVNTVR.

PROPOSITIO 61.
Problema.

612. *Sit* ATDB*b figura nauis anterior aquae immerſa et plano diametrali verticali* ACD *in duas portiones aequales et ſimiles diremta; haecque figura in aqua curſu directo progrediatur ſecundum directionem* CAL: *determinare reſiſtentiam, quam haec figura in motu ſuo patietur.* Tab. XXVIII. fig. 1.

Solutio.

Repraeſentatur in hac figura partis anterioris ſeu prorae nauigii aliusue corporis ſimilis aquae innatantis ea portio quae aquae eſt immerſa, cuiusque ſuperficies in curſu directo ab aqua reſiſtentiam patitur. In ea igitur eſt planum horizontale AB*b* ſectio aquae, planum verticale ACD dirimit iſtam portionem ita in duas partes ſimiles et aequales ACDB et ACD*b*, vt omnes rectae horizontales in plano ACD ductae ſint totidem diametri ſectionum horizontalium ſeu plano AB*b* parallelarum ſolidi propoſiti. Cum igitur motus huius corporis in aqua fiat ſecundum

Digitized by Google

directionem horizontalem CAL, manifeſtum eſt mediam reſiſtentiae directionem incidere debere in ipſum planum diametrale ACD; vnde vis reſiſtentiae partim motum retardabit, partim corpus ex aqua eleuabit, ſi quidem media directio non fuerit horizontalis, ſed ſurſum vergens. Ad hunc ergo reſiſtentiae duplicem effectum definiendum, ſit primo altitudo celeritati, qua corpus in directione CAL progreditur debita altitudini v. Deinde ſumta recta AC pro axe ſit in ea abſciſſa $AP = x$, atque per punctum P facta concipiatur ſectio verticalis STs ad planum diametrale ACD normalis, in cuius baſi Ss ponatur portio quaecunque $PM = y$; et verticalis $MQ = z$. Definietur igitur hoc modo in ſuperficie corporis propoſiti punctum Q per aequationem inter tres variabiles x, y et z. Sit autem iſta aequatio reducta ad hanc aequationem differentialem $dz = Pdx + Qdy$, in qua P et Q ſint functiones quaepiam ipſarum x et y, non inuoluentes z; haecque aequatio ob partes vtrinque circa diametrale planum ACD ſitas ſimiles et aequales vtriusque medietatis ACDB, ACDb naturam exprimet. Iam quo pateat ſub quonam angulo elementum ſuperficiei in Q ſumtum in aquam impingat, vel planum tangens ſuperficiem in Q vel recta normalis QR ad ſuperficiem in puncto Q definiri debebit. Inveſtigemus ergo poſitionem normalis huius QR, quem in finem primo ſolum ſectionem STs conſiderabimus, cuius natura ob x conſtans hac exprimetur aequatione $dz = Qdy$, ex qua ita definietur poſitio normalis QN ad arcum SQT, vt ſit ſubnormalis $MN = -\frac{zdz}{dy} = -Qz$ vnde ſit $PN = -y - Qz$. Quare ſi in plano ABb ad

MN

Digitized by Google

MN ducatur perpendicularis NR, omnes rectae ex Q ad hanc rectam NR ductae ad curuam SQT in puncto Q erunt normales; quarum quae ſimul ad ipſam ſuperficiem in puncto Q ſit normalis, reperietur hoc modo. Per puncta M et Q concipiatur ſectio verticalis IMGH plano diametrali ACD parallela, ac curuae IQH ob y conſtans natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$. Sit nunc recta QK normalis ad curuam IQH in puncto Q, erit ſub normalis $MK = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Si ergo in plano ABb ad rectam MK ducatur normalis KVR, omnes quoque rectae ex Q ad lineam KR ductae normales erunt in Q ad curuam IQH. Cum itaque rectae NR et KR ſeſe interſecent in puncto R, exiſtente $AV = x + Pz$, et $VR = PN = -y - Qz$, quarum haec VR ad alteram AV eſt perpendicularis; erit recta QR in puncto Q tam ad curuam SQT quam IQH normalis; et hancobrem haec recta QR normalis erit ad ſuperficiem ipſam in puncto Q. Angulus ergo quo ſuperficiei elementum in Q in aquam impingit, complementum erit ad rectum eius anguli quem normalis QR cum directione curſus CAL ſeu cum recta RN huic parallela conſtituit, qui angulus eſt QRN. At ob $MN = -Qz$; erit $QN = z\sqrt{(1 + QQ)}$ et ob $NR = MK = Pz$ erit $QR = z\sqrt{(1 + PP + QQ)}$ vnde anguli QRN ſinus erit $= \frac{\sqrt{(1+QQ)}}{\sqrt{(1+PP+QQ)}}$ coſinus vero $= \frac{P}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, qui coſinus ſimul ſinus erit anguli ſub quo ſuperficiei elementum in Q ſitum in aquam impingit. Quare ſi elementum ſuperficiei ponatur $= dS$, erit vis reſiſtentiae quam patietur $= \frac{P^2 v dS}{1+P^2+Q^2}$: huiusque vis dire-

 ctio

ctio ſita erit in ipſa normali QR ad ſuperficiem. Oportet autem elementum ſuperficiei dS per differentialia cordinatarum x, y et z exprimi, quo per integrationem totalis reſiſtentia colligi queat. Concipiatur igitur abſciſſa x creſcere elemento dx, et applicata y elemento dy; orieturque in P rectangulum infinite paruum $dxdy$ in plano ABb poſitum, cui ex angulis eius deorſum ductis verticalibus in ſuperficie reſpondebit elementum dS, cuius inclinatio ad planum ABb, quae aequalis eſt angulo MQR praebebit $dS = dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Hinc ergo reſiſtentia quam elementum dS patietur erit $= \frac{P^2 v dx dy}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, eiusque directio incidet in normalem QR. Reſoluatur nunc haec reſiſtentiae vis in ternas inter ſe normales quarum directiones ſint parallelae coordinatis tribus AP, PM, et MQ. Cum igitur hae tres vires concipi queant in puncto R applicatae, figura in R verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; tum vrgebitur in directione Rn axi AC parallela vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; denique vrgebitur in directione Rk rectae Ss parallela vi $= \frac{-P^2 Q v dx dy}{1+P^2+Q^2}$. Si nunc reſiſtentia elementi in altera medietate ACDb analogi ſimili modo colligatur, eaque cum inuenta coniungatur, vires in directionibus ipſi Ss parallelis ſe mutuo deſtruent; at in V corpus verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{2P^2 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; ſimulque in directione axis VC directe retrorſum vrgebitur vi $= \frac{2P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$. A reſiſtentia igitur, quam patitur portio ſuperficiei a duabus ſectionibus STs et altera huic parallela et interuallo dx diſſita abſciſſae figura retrorſum vrgebitur

tur in directione AC vi $= 2\,v dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, quae integratio in qua ponitur x conſtans ita abſoluatur vt euaneſcat poſito $y = 0$, tumque ponatur $y =$ PS. Surſum vero vrgebitur vi $= 2\,v dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$ cuius vis momentum reſpectu puncti A erit $2\,v dx \int \frac{P^2 (x+Pz) dy}{1+P^2+Q^2}$; quae integralia eodem modo quo ante ſunt accipienda. Totalis ergo reſiſtentia quam integra ſuperficies ab aqua patietur; reducitur ad duas vires quarum altera retrorſum vrgebitur in directione AC vi $= 2\,v \int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, vbi notandum integrale $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ praeſcripto modo ſumtum fore functionem ipſius x tantum; ex quo poſterius integrale $\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, ita ſumi debet vt euaneſcat poſito $x = 0$, hocque facto poni debet $x =$ AC, quo reſiſtentia totius corporis propoſiti obtineatur. Simul vero figura ſurſum verticaliter vrgebitur vi $= 2\,v \int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$, cuius vis momentum cum ſit $= 2\,v \int dx \int \frac{P^2 (x+Pz) dy}{1+P^2+Q^2}$ ea cenſenda eſt applicata in puncto O axis AC, ita vt ſit AO $=$ $\frac{\int dx \int \frac{P^2 (x+Pz) dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}$ integralibus ea lege, qua eſt praeceptum ſumtis. Ex his ergo ambabus viribus reſiſtentiae aequiualentibus repericiur media totius reſiſtentiae directio, quae per punctum O in plano ACD tranſibit, atque cum AC angulum conſtituet cuius tangens erit $= \frac{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}}$ ſub quo angulo media directio reſiſtentiae ex O verſus puppim ſurſum verget Q. E. I.

Coroll. 1.

613 Nauis igitur curſus directo ſecundum directionem AL progrediens a reſiſtentia retardabitur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^3 dy}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$, quae expreſſio volumen aquae indicat cuius pondus ipſi vi eſiſtentiae eſt aequale.

Coroll. 2.

614. Cum autem nauis inſuper ſurſum vrgeatur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^2 dy}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$, tanta vi nauis quaſi leuior facta eſt cenſenda, eaque ex aqua attolletur, aequiualet vero etiam ponderi aquae, cuius volumen iſta expreſſione indicatur.

Coroll. 3.

615. Praeterea vero, niſi media directio reſiſtentiae per ipſum grauitatis centrum tranſeat, nauis a reſiſtentia circa axem latitudinalem conuertetur, eiusque prora vel eleuabitur vel deprimetur, prout directio reſiſtentiae vel ſupra vel infra centrum grauitatis dirigatur.

Coroll. 4.

616. Denique ex inuentis expreſſionibus manifeſtum eſt, omnes reſiſtentiae effectus, quitum in retardanda tum alleuanda tum inclinanda naui conſiſtunt rationem ſequi duplicatam celeritatum, quibus nauis promouetur.

Coroll. 5.

616. Superficies tota huius corporis ex datis formulis ita calculo ſubducetur. Cum elementum ſuperficiei

dS

dS ſit $= dx\,dy\,V(1+P^2+Q^2)$ integretur primo $dy\,V(1+P^2+Q^2)$ poſito x conſtante ita vt integrale euaneſcat poſito $y=0$ tumque ponatur $y=PS$, quo facto integrale abibit in functionem quandam ipſius x; ita vt $\int dx \int dy\,V(1+P^2+Q^2)$ aſſignari queat, quod integrale poſito $x=AC$ bis ſumtum, totam ſuperficiem praebebit.

Coroll. 6.

617. Ad ſoliditatem autem totius figurae ABDb inueniendam, ſit $PT=t$ et $PS=s$ erunt t et s functiones ipſius x ex aequatione $dz=P\,dx+Q\,dy$ aſſignabiles. Tum vero erit area $PTS=\int z\,dy=-\int y\,dz$ ob $z=0$ quando ſit $y=s=-\int Q\,y\,dy$. Integrale $\int Q\,y\,dy$ ita ſumatur poſito x conſtante, vt euaneſcat poſito $y=0$ tumque ponatur $y=s$. Quo facto $2\int -dx \int Q\,y\,dy$ poſito poſt integrationem $x=AC$ dabit ſoliditatem totius figurae.

Coroll. 7.

618. Cum ſuperficies ABDb ponatur tota atque ſola reſiſtentiam pati, ſi quidem nauis in directione AL progrediatur, neceſſe eſt vt planum BDb ſit ampliſſima nauis ſectio transuerſalis, atque inſuper vt omnia totius huius portionis ABDb plana tangentia verſus proram inclinent.

Coroll. 8.

619. Hinc etiam colligitur, ſi figura ABDb fuerit ſemiſſis corporis cuiusdam aqua grauioris, hocque corpus in aqua vel deſcendat vel totum aquae ſubmerſum moueatur in directione AL, tum reſiſtentiam eſſe paſſurum ſecundum

cundum directionem AC tantum, quae erit $= 4v\int dx \int \frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}$.

Scholion.

620. Ex aequatione differentiali $dz = Pdx + Qdy$, cuius quidem integrale notum eſſe aſſumimus, qua naturam ſuperficiei ATDB expreſſimus, tota iſta ſuperficies perfecte cognoſcitur. Sectio enim aquae AB*b* primo cognoſcetur ſi fiat $z = 0$, quo caſu ſi ponatur $PS = s$, fit $y = s$ atque aequatio $Pdx + Qds = 0$ naturam ſectiones aquae ſeu relationem inter $AP = x$ et $PS = s$ exhibebit. Simili modo quaeuis alia ſectio horizontalis innoteſcet ponendo $z =$ conſtanti ſeu $dz = 0$, ex aequatione $Pdx + Qdy = 0$, in qua x abſciſſam in axe ipſi AC parallelo ſumtam et y applicatam denotabit. Quamuis autem pro his omnibus ſectionibus eadem prodeat aequatio $Pdx + Qdy = 0$, tamen hinc omnes inter ſe aequales non ſint cenſendae, cum aequatio $Pdx + Qdy = 0$ ſit differentialis et in integratione innumerabiles conſtantes recipere queat. Pro qualibet autem ſectione horizontali integrale formulae $Pdx + Qdy$ aequale poni debet valori ipſius z, ſeu interuallo, quo quaeque ſectio a ſectione aquae AB*b* diſtat. Semper vero formula differentialis $Pdx + Qdy$ integrationem admittet, quia generaliter eſt $dz = Pdx + Qdy$ atque P et Q a z non pendere ponuntur, ita vt $Pdx + Qdy$ ſit differentiale eius functionis ipſarum x et y, cui z aequatur. Hancobrem P et Q eiusmodi erunt functiones ipſarum x et y, vt ſi fuerit $dP = Rdx + Sdy$ et $dQ = Tdx + Vdy$, futurum ſit $S = T$, vnde generatim nexus inter P et Q inſpicitur. Sin autem P et Q fuerint

Digitized by Google

fuerint ſunctiones, in quibus x et y vbique eundem dimenſionum numerum puta n teneant, erit $Px + Qy = (n+1) z$, vnde immediate ex dato valore ipſius P valor ipſius Q reperitur. Deinde etiam natura plani diametralis verticalis ACD exprimetur ponendo $y = 0$, quo caſu fit $z = PT = t$, ita vt habeatur inter $AP = x$ et $PT = t$ iſta aequatio $dt = Pdx$, poſito in P, quae generaliter eſt functio ipſarum x et y, $y = 0$. Natura denique ſectionis nauis transuerſalis ampliſſimae BDb habebitur cognita ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ ponendo $x = AC = a$; tum enim ob $CG = y$ et $GH = z$ erit $dz = Qdy$. Quemadmodum autem ex aequatione canonica $dz = Pdx + Qdy$ natura totius ſuperficiei ATDB cognoſcitur, ita viciſſim ex data ſuperficiei natura aequatio canonica elicietur. Si enim dentur aequationes tum pro ſectione aquae ACB, tum pro plano diametrali ATD, tum etiam pro ſingulis ſectionibus transuerſalibus SPT, definire licebit longitudinem $MQ = z$, quae ex quouis puncto M ſectionis aquae deorſum vsque ad ſuperficiem demittitur; hocque modo z exprimetur per quantitatem ex x, et y ex conſtantibus compoſitam, qui valor differentiatus dabit $dz = Pdx + Qdy$ aequationem canonicam naturam ſuperficiei exprimentem. Praecipuas igitur huiusmodi ſuperficierum ſpecies in ſequentibus problematis euoluemus, atque reſiſtentiam, quam quaeque in aqua directe promota patitur, definiemus; poſtquam praecipuas ſpecies ad aequationem canonicam huius formae $dz = Pdx + Qdy$ reduxerimus.

PROPOSITIO 62.
Problema.

Tab XXVIII. fig. 2.

621. *Sit pars corporis aquae innatantis; quae in aqua verſatur, figura conica* ABDb *baſin habens datam* BDb *et verticem in* A *ita vt eius ſuperficies terminetur lineis rectis* HA *ex ſingulis baſis* BDb *punctis ad verticem* A *ductis moueaturque haec figura ſecundum directionem axis* CAL, *determinare reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

In hoc igitur corpore ſectio aquae BA*b* erit triangulum iſoſceles, planum diametrale ACD vero triangulum rectangulum. Deinde quaeuis ſectio transuerſalis ST*s* baſi ſeu ſectioni ampliſſimae BD*b* parallela erit ipſi baſi BD*b* ſimilis. Sit ergo ſemiſſis baſis CBD, quippe cui altera ſemiſſis C*b*D ſimilis eſt et aequalis, curua quaecunque data ita vt eius natura ſit cognita per aequationem inter coordinatas CG et GH. Poſitis igitur CG $= r$ et GH $= u$, erit u functio quaecunque ipſius r. Ductis iam rectis GA et HA poſitoque AC $= a$ erit ob triangula ſimilia AC (a) : Ap (x) $=$ CG (r) : PM (y) $=$ GH (u) : MQ (z) vnde erit $y = \frac{rx}{a}$; et $z = \frac{uy}{r} = \frac{ux}{a}$. Sit $du = pdr$, exiſtente p functione quadam ipſius r, erit ob $r = \frac{ay}{x}$; $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$ atque $du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$; vnde fit $dz = \frac{udx}{a} + pdy - \frac{pydx}{x}$, quae aequatio cum generali canonica comparata $dz = Pdx + Qdy$ dat $P = \frac{u}{a} - \frac{py}{x} = \frac{u - pr}{a}$ ob $y = \frac{rx}{a}$ atque $Q = p$; vnde obtinetur $1 + P^2 + Q^2 = 1 + p^2 +$

$\frac{(u-pr)^2}{aa}$. Ad reſiſtentiam vero definiendam oportet ante omnia ſequentia inuenire integralia $\int\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}$; $\int\frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2}$, $\int\frac{P^2(1+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$ poſito x conſtante, integralibusque ita ſumtis vt euaneſcant poſito $y=0$, ponere $y=PS$ vel $z=0$. At poſito x conſtante eſt $dy=\frac{xdr}{a}$; vnde fit $\int\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a}\int\frac{(u-pr^2)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}\int\frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; atque $\int\frac{P^2(1+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{xx}{a^3}-\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ quae cum ita fuerint accepta vt euaneſcant poſito $y=0$ ſeu $r=0$, poni debet $z=0$ ſeu $u=0$. Quoniam vero iſta integralia hoc modo inuenta ab x non pendebunt, erit totalis reſiſtentia qua figura ſecundum directionem AC retropellitur $=2v\int\frac{xdx}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=v\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; integrali hoc eodem modo accepto quo modo eſt praeceptum. Simul vero a reſiſtentia corpus hoc conicum ſurſum vrgebitur vi $=2v\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=av\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ cuius vis directio verticalis tranſibit per punctum O ita vt

fit $AO=\frac{\int\frac{xxdx}{a^3}\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}$ ſeu

$AO=\frac{2\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{3a\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}$. Ex hisque duabus viribus vna cum puncto O cognitis tota reſiſtentiae vis innoteſcit. Q. E. I.

Coroll. 1.

622. Intelligitur ex formulis inuentis primum quo longius vertex A a baſi B D b diſtet, eo minorem fore vim reſiſtentiae, quam figura patitur: reſiſtentiam vero non tenere rationem quampiam aſſignabilem pro varietate longitudinis axis AC $=a$. Coroll.

Coroll. 2.

623. At ſi longitudo AC fuerit vehementer magna vt prae $\underline{a}$ reliquae quantitates ad baſem BDb pertinentes negligi queant, tum reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC erit $= \frac{v}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{1+pp}$ vis autem qua ſurſum pelletur $\frac{v}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{1+pp}$, cuius directio tranſibit per punctum O exiſtente AO $= \frac{2}{3}a$.

Coroll. 3.

624. Hoc ergo caſu vis reſiſtentiae corpus retropellentis in directione AC reciproce ſe habebit vt quadratum longitudinis coni AC. At vis ſurſum pellens rationem tenebit reciprocam longitudinis coni: ſcilicet ſi longitudo coni fuerit vehementer magna.

Coroll. 4.

625. Cum area baſis BDb ſit $= 2\int udr$ poſito poſt integrationem $r =$ CB ſeu $u = 0$, erit reſiſtentia, quam baſis pateretur, ſi directe ſecundum CA eadem celeritate in aqua moueretur $= 2v\int udr$, eiusque directio eſſet normalis ad baſin et per eius centrum grauitatis tranſiret.

Coroll. 5.

626. Idem vero caſus, quo ſola baſis promouetur, obtinetur ſi fiat $a = 0$. Tum autem reſiſtentiae vis ſurſum vrgens euaneſcit, vis autem retroagens erit $= v\int(u-pr)dr = v\int udr - v\int rdu$. At ſi poſt integrationem ita peractam vt prodeat nihil, ſi ponatur $r = 0$, ponatur $u = 0$, tum eſt $\int rdu = -\int udr$, ex quo reſiſtentia retropellens prodit $= 2v\int urd$.

Coroll.

Coroll. 6.

627. Tota ſuperficies huius corporis eſt $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ (610). Sit vero $\int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)} = \int \frac{dy}{a} \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$, quae cum ponatur x conſtans abit in $\frac{x}{a^2} \int dr \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$; vnde tota ſuperficies prodit $= \int dr \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$ poſito poſt integrationem poſtremam $x = a$.

Coroll. 7.

628. Cum denique ſoliditas ſit $= 2\int - dx \int Q\, y\, dy$ (617) ob $Q = p$ et $y = \frac{rx}{a}$, fiet ea $= 2\int - dx \int \frac{x^2 pr\, dr}{aa} = 2\int - \frac{xxdx}{aa} \int r\, du = \frac{2}{3} a \int u\, dr$ denotante $\int u\, dr$ aream BCD; id quod quidem vltro patet ex elementis Geometriae.

Scholion 1.

629. In hac ergo propoſitione primam atque facillimam corporum ſpeciem examini ſubiecimus, quae omnis generis corpora conoidica ſub ſe complectitur: non ſolum enim conus rectus qui baſin habet circularem in ea continetur, ſed etiam coni obliqui, quippe qui ad rectos reduci poſſunt ſumta quapiam ſectione conica pro baſi, deinde etiam generaliter huc pertinent omnia corpora, quae ex data quacunque baſe ad punctum quoddam ſublime ductis lineis rectis generantur, quorſum praeter conos baſes curuilineas habentes etiam pyramides pertinent. Hic autem ſecundum noſtrum inſtitutum eiusmodi tantum corpora conoidica conſideramus, quae duas habent partes ſimiles et aequales ex vtraque plani diametralis parte ſitas, quo tota tractatio nauibus maxime ſit accommodata. Cum

 vero

Digitized by Google

vero rem tam generaliter concipiendo formulae ſuperſint integrales, de quarum integratione non conſtat, iuuabit caſus quosdam ſpeciales euoluere, quibus data figura determinata pro baſi BDb accipitur.

Exemplum 1.

Tab. XXIX. fig. 1.

630. Sit pars aquae ſubmerſa quae reſiſtentiam ſentit pyramis triangularis $ABDb$ cuius baſis ſeu ſectio ampliſſima BDb eſt triangulum iſoſceles, in quo ſit $CB = Cb = b$ et $CD = c$. Poſito ergo $CG = r$ et $GH = u$, erit $c : u = b : b - r$, hincque $u = c - \frac{cr}{b}$ et $du = -\frac{cdr}{b}$; vnde ſit $p = -\frac{c}{b}$. Si nunc haec pyramis directe progrediatur ſecundum directionem AL celeritate debita altitudini v, atque longitudo AC ponatur $= a$, reperietur ob $u - pr = c$ et $aa + aapp = \frac{aa(bb+cc)}{bb}$ reſiſtentiae vis in directione AC retropellens $= v\int\frac{(u-pr)^3 dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2} = v\int\frac{b^2c^3 dr}{aa(bb+cc)+bbcc}$ vnde poſt integrationem poſito $r = b$ prodit iſta reſiſtentiae vis motui directe contraria $= \frac{b^3c^3v}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. Deinde cum ſit $\int\frac{(u-pr)^2 dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2} = \int\frac{b^2c^2 dr}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ erit vis reſiſtentiae verticaliter ſurſum urgens $= \frac{ab^3c^2v}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$, cuius directio tranſibit per punctum O exiſtente $AO = \frac{2\int(aa+cu)dr}{3ab} = \frac{2aa+cc}{3a}$. Soliditas vero totius huius pyramidis $ABDb$ erit $= \frac{2a}{3}\int u\,dr = \frac{abc}{3}$; ſuperficies vero in aquam irruens ſeu duo triangula ABD et $AbD = \int dr\sqrt{(aa+aapp+(u-pr)^2)} = \sqrt{(aabb+aacc+bbcc)}$.

Corol.

Coroll. 1.

631. Cum igitur baſis BDb ſit $= bc$; et ſuperficies in aquam impingens $= \sqrt{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$, erit reſiſtentia motum retardans aequalis altitudini celeritati debitae ducta in cubum baſis et diuiſae per quadratum ſuperficiei.

Coroll. 2.

632. Manente igitur baſi BDb, eadem reſiſtentia eo erit minor, quo maior fuerit ſuperficies corporis, quae ab aqua reſiſtentiam patitur; eſt enim reſiſtentia motui contraria reciproce vt quadratum ſuperficiei.

Coroll. 3.

633. Ponatur baſis BDb conſtans ſeu $bc = ff$, vt ſit $c = \frac{ff}{b}$, erit reſiſtentia motum retardans $= \frac{bbf^6 v}{a^2b^4 + a^2f^4 + bbf^4}$ vnde intelligitur reſiſtentiam fore minimam, ſi vel b vel c maximam habuerit quantitatem, maxima autem erit reſiſtentia ſi fuerit $b = c$.

Coroll. 4.

634. Cum in hoc caſu tam ff quam a poſitum ſit conſtans, atque $\frac{1}{6}aff$ denotet ſoliditatem figurae, patet inter omnes pyramides triangulares quae aequales baſes et altitudines habent eam maximam pati reſiſtentiam, cuius baſis ſit triangulum iſoſceles ad D rectangulum.

Coroll. 5.

635. Quo magis igitur angulus BDb differt a recto, eo minorem pyramis in motu ſuo ſentiet reſiſtentiam;

ce-

ceteris paribus. Scilicet manentibus tum baſi tum longitudine eiusdem quantitatis.

Coroll. 6.

636. Si baſis BDb nuda contra aquam directe impingat eadem celeritate altitudini $\underline{v}$ debita, reſiſtentiam ſentiret $= bcv$. Ex quo reſiſtentia pyramidis ſe habebit ad reſiſtentiam baſis vt b^2c^2 ad $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$; vnde intelligitur reſiſtentiam baſis eo eſſe maiorem reſiſtentia pyramidis, quo maior ſit eius altitudo $\underline{a}$.

Coroll. 7.

637. Manente autem latitudine baſis Bb et ſoliditate pyramidis eiusdem quantitatis, reſiſtentia eo erit minor, quo minor fuerit profunditas CD$= c$, ſeu quo longior capiatur pyramidis longitudo AC.

Coroll. 8.

638. Denique notandum eſt vim reſiſtentiae qua corpus ſurſum pellitur et ex aqua eleuatur ſe habere ad vim reſiſtentiae motui contrariam vt ſe habet $\underline{a}$ ad c hoc eſt vt AC ad CD. Vnde pyramis eo magis ſurſum pelletur, quo longior ſit eius axis AC, ſeu quo fuerit acutior cuſpis in A.

Exemplum 2.

Tab. XXVIII. fig. 2. 639. Abeat corpus noſtrum conoidicum in ſemi conum rectum, ita vt tam baſis BDb quam omnes ſectiones ipſi parallelae STs ſint ſemicirculi. Ponatur autem huius coni altitudo AC$= a$, quae ſimul eſt directio ſecun-

cundum quam hic conus mouetur celeritate altitudini v debita. Poſito igitur baſis BDb ſemidiametro $BC = CD = b$, erit ob $CG = r$ et $GH = u$ ex natura circuli $u = \sqrt{(bb-rr)}$; vnde fit $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, et $1 + pp = \frac{bb}{bb-rr}$ atque $u - pr = \frac{bb}{\sqrt{(bb-rr)}}$. Ex his fit $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2(1+pp)+(u-pr)^2} = \int \frac{b^4 dr}{(a^2+b^2)\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b^4}{(2a^2+2b^2)}$ poſito poſt integrationem $r = b$, et denotante $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum. Quamobrem reſiſtentiae vis, quae vrget ſecundum directionem horizontalem AC erit $= \frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$. Porro cum ſit $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr)^2} = \int \frac{b^2 dr}{a^2+b^2} = \frac{b^3}{a^2+b^2}$ atque $\int \frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr)^2} = \int bb\,dr = b^3$ erit reſiſtentiae vis corpus verticaliter surſum pellens $= \frac{ab^3 v}{a^2+b^2}$, huiusque vis directio transibit per punctum O, ita vt ſit $AO = \frac{2aa+2bb}{3a}$. Soliditas ceterum huius corporis erit $= \frac{2a}{3}\int dr \sqrt{(bb-rr)} = \frac{\pi abb}{6}$ atque ſuperficies conica, quae reſiſtentiam ſentit prodibit $= \int \frac{bdr\sqrt{(aa+bb)}}{\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, quae quidem facillime ex notis coni proprietatibus deducuntur.

Coroll. 1.

640. Cum baſis ſemiconi ſeu ſemicirculus BDb ſit $= \frac{\pi bb}{2}$, ſi ea moueretur in eadem directione CA in aqua foret eius reſiſtentia $= \frac{\pi bbv}{2}$. Vnde reſiſtentia ipſius coni ſe habebit ad reſiſtentiam baſis ut b^2 ad $a^2 + b^2$ hoc eſt ut CD^2 ad AD^2.

Coroll. 2.

641. Mutetur ſemicirculus BDb in triangulum iſosceles aeque capax, conusque abibit in pyramidem cuius

 lon-

longitudo a ſit eadem. Poſitis autem dimidia latitudine baſis huius pyramidis, $CB = b$, et altitudine $CD = \gamma$ erit $\beta\gamma = \frac{\pi b^2}{2}$; et reſiſtentia pyramidis huius erit $\frac{\beta^3\gamma^3 v}{a^2\beta^2 + a^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}$

Coroll. 3.

642. Cum igitur ſit $bb = \frac{2\beta\gamma}{\pi}$, erit reſiſtentia coni aeque alti et aeque capacis $= \frac{2\beta^2\gamma^2 v}{\pi a^2 + 2\beta\gamma}$, vnde reſiſtentia coni ſe habebit ad reſiſtentiam pyramidis aequalis altitudinis et baſis vt $2a^2\beta^2 + 2a^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2$ ad $\pi a^2\beta\gamma + 2\beta^2\gamma^2$.

Coroll. 4.

643. Reſiſtentia ergo coni aequalis erit reſiſtentiae pyramidis eiusdem baſis eiusdemque altitudinis, ſi fuerit $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\pi\beta\gamma}{2}$ ſeu $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{(\frac{\pi^2}{16} - 1)}$ hoc eſt nunquam. Quare reſiſtentia coni ſemper maior eſt quam reſiſtentia pyramidis.

Exemplum 3.

Tab. XXVIII. fig. 2. 644. Sit nunc baſis coni BDb ſemiellipſis centro C deſcripta, quo caſu figura abibir in conum ſcalenum. Sed ponatur $CB = Cb = b$, et $CD = c$, erit ex natura ellipſis $u = \frac{c}{b}\sqrt{(bb-rr)}$, vnde fit $p = \frac{-cr}{b\sqrt{(bb-rr)}}$ et $1 + pp = \frac{b^4 + (cc - bb)rr}{b^2(b^2 - rr)}$ atque $u - pr = \frac{bc}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hincque $a^2(1+pp) + (u-pr)^2 = \frac{a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr}{b^2(bb-rr)}$. Ex his reperitur $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2 + a^2p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^3c^3 dr}{(a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr)\sqrt{(b^2-r^2)}}$ cuius integrale poſito $r = b$ eſt $= \frac{\pi b^2c^2}{c\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$; vnde reſiſtentiae vis, quae motum retardat et in directione AC vrget eſt $= \frac{\pi b^2c^2 v}{2\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$. Deinde eſt $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2 + a^2p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^4c^2 dr}{b^4(a^2+c^2) + a^2(c^2-b^2)r^2}$ cuius

cuius integrale a quadratura circuli pendebit ſi $c > b$, at ſi $c < b$ pendebit a logarithmis. Cum autem ad noſtrum inſtitutum non multum pertineat, quantum corpus ſurſum vrgeatur a reſiſtentia, et in quanam directione, huic inveſtigationi operam non impendemus; ſed ſufficiat veram reſiſtentiam, qua motus retardatur, determinaſſe.

Coroll. 1.

645. Quoniam in expreſſione reſiſtentiae inuenta $\frac{\pi b^2 c^2 v}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$ ſemiaxes coniugati baſis b et c aequaliter inſunt, *ii* inter ſe commutari poſſunt manente eadem reſiſtentia. Hoc eſt dummodo ellipſis BDb alter ſemiaxis ſit b alter vero c reſiſtentia prodit eadem.

Coroll. 2.

646. Si area baſis BDb quae eſt $\frac{\pi bc}{2}$ dicatur $= A$, ob $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} =$ ſinui ang. CAB et $\frac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} =$ ſin. ang. CAD, erit reſiſtentia $= Av$ ſin. CAB. ſin. CAD; vbi notandum Av exprimere reſiſtentiam baſis BDb ſi ea nuda in directione CA promoueretur.

Coroll. 3.

647. Si loco ellipſis BDb ſubſtituatur circulus eiusdem areae, erit eius radius $= \sqrt{bc}$, atque reſiſtentia, quam hic conus patietur erit $= \frac{\pi b^2 c^2 v}{2(a^2+bc)}$. Reſiſtentia igitur coni circularis ſe habebit ad reſiſtentiam coni elliptici aequalis baſis aequaliſque altitudinis vt $\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$ ad a^2+bc.

Coroll. 4.

648. Niſi ergo ſit $b=c$, reſiſtentia coni circularis ſemper erit maior quam reſiſtentia coni elliptici. Sumtis enim quadratis perſpicuum eſt eſſe $a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 > a^4+2a^2bc+bbcc$, quia ſemper eſt $bb+cc>2bc$, niſi ſit $b=c$.

Coroll. 5.

649. Manente ergo area baſis elliptica BDb et altitudine coni AC eadem, reſiſtentia erit maxima , ſi baſis abeat in ſemicirculum. Eo minor igitur erit reſiſtentia, quo maior inaequalitas inter altitudinem et latitudinem baſis intercedet.

Scholion 2.

650. Ex his igitur ſatis perſpicuum eſt corpus conoidicum, quod minimam patiatur reſiſtentiam in finitis aſſignari non poſſe. Nam ſi altitudo coni a maneat conſtans, reſiſtentia eo minor euadet, quo minor accipiatur baſis BDb ceteris paribus. At ſi inſuper baſi data area tribuatur, reſiſtentia ſemper magis diminui poteſt inaequalitatem inter eius altitudinem CD et latitudinem CB maiorem ponendo. Hancobrem iſtud problema non attingemus, quo vel inter omnes conos abſolute, vel inter aequicapaces tantum is deſideretur qui minimam patiatur reſiſtentiam. Ad alias igitur corporum ſpecies progrediamur et quomodo reſiſtentia ſe in iis habeat, inquiramus. Eiusmodi vero adhuc contemplabimur corporum figuras, in quibus unica curua maneat indeterminata, quemadmodum euenit in his corporibus conoidicis in quibus ſola baſis ſupererat indeterminata.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO 63.
Problema.

651. *Sit partis ſubmerſae nauis pars anterior in motu directo reſiſtentiam patiens cono cuneus latiſſimo ſenſu acceptus* AEDHB*bb*D, *ex data curua tanquam baſi* BD*b et recta verticali* AFE *ita generatus vt eius ſuperficies terminetur rectis horizontalibus* HF, *b*F *ex ſingulis perimetri baſis* BD*b punctis ad rectam* AE *ductis; haecque figura curſu directo in aqua progrediatur ſecundum directionem axis* CAL: *determinare reſiſtentiam quam patietur* Tab. XXIX. fig. 2.

Solutio.

In hac igitur figura planum verticale diametrale ACDE erit parallelogrammum rectangulum, atque ſectio aquae AB*b* triangulum iſosceles; ſimilique modo omnes ſectiones horizontales FH*b* erunt triangula aequicrura. Porro ex conſtructione apparet omnes ſectiones verticales per rectam AE factas, cuius modi eſt AGHF eſſe parallelogramma rectangula. Tota ergo figura in prora deſinit in aciem rectilineam verticalem AFE; ampliſſima autem ſectio verticalis axi AC normalis erit baſis huius cono cunei BD*b*, a cuius natura totius figurae natura pendet. Poſita ergo longitudine $AC = a$, ſumatur in baſi abſciſſa $CG = r$ et applicata $GH = u$, atque ob baſin datam dabitur aequatio inter u et r, ſeu u per r. Sit autem $du = pdr$, et quantitas p erit cognita per r. Concipiatur nunc ſectio verticalis ST*s* baſi parallela, pro qua ſit $AP = x$, et per GH et AE alia fiat ſectio AGHF, quae erit rectangulum, eiusque latus HF in ſuperficie figurae erit ſitum. Poſitis ergo $PM = y$ et $MQ = z$ erit $z =$

 GH

GH $= u$, atque $x:y = a:r$, vnde fit $y = \frac{rx}{a}$. Ex his reperitur $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$, et $dz = du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$. Pro ſuperficie igitur huius cono-cunei iſta habetur aequatio $dZ = \frac{-apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$, qua cum aequatione canonica $dZ = Pdx + Qdy$ comparata dat $P = \frac{-apy}{xx} = \frac{-pr}{x}$, ob $y = \frac{rx}{u}$ atque $Q = \frac{ap}{x}$. Hinc oritur $1 + P^2 + Q^2 = \frac{x^2 + p^2(a^2 + r^2)}{x^2}$, atque formulae integrales propoſitionis 61. in quibus poſitum eſt x conſtans in ſequentes transmutantur, ob $dy = \frac{xdr}{a}$ quia x eſt conſtans: ſcilicet fit $\int \frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = -\int \frac{p^3 r^3 dr}{axx + ap^2(a^2 + r^2)}$; et $\int \frac{P^2 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \int \frac{p^2 r^2 xdr}{axx + ap^2(a^2 + r^2)}$ atque cum ſit $x + Pz = x - \frac{pru}{x}$ erit $\int \frac{P^2(x + Pz)dy}{1 + P^2 + Q^2} = \int \frac{p^2 r^2 (xx - pru)dr}{axx + ap^3(a^2 + r^2)}$ quae integralia ita ſunt accipienda poſito x conſtante, vt euaneſcant poſito $r = 0$, tum vero poni debet $r =$ CB ſeu $u = 0$. Ad reſiſtentiam deinde ipſam inueniendam ſumi debet hoc integrale $\int dx \int \frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = -\int \frac{dx}{a} \int \frac{p^3 r^2 dr}{xx + p^2(a^2 + r^2)}$. At quoniam poſt integrationem poſterioris formulae r et p ab x non pendebunt, quaeſtio huc eſt reducta vt $\frac{-p^3 r^3 dr dx}{ax^2 + ap^2(a^2 + r^2)}$ bis integretur ponendo in altera integratione x in altera vero r et p conſtantes; perinde autem eſt ab vtra integratione initium fiat. Quare ponamus primo p et r conſtantes eritque integrale $\frac{-p^2 r^3 dr}{a\sqrt{(a^2 + r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2 + r^2)}}$ poſito poſt integrationem vti oportet $x = a$. Integratione ergo altera inſtituta et poſtea poſito $r =$ CB ſeu $u = 0$, prodibit $\int dx \int \frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \int \frac{-P^2 r^3 dr}{a\sqrt{(a^2 + r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2 + r^2)}}$. Hancobrem ſi cono-cuneus moueatur ſecundum directionem axis CAL celeritate altitudini v debita, erit reſiſtentiae vis, qua ſecundum directionem AC repelletur $= \frac{-v}{a} \int \frac{p^2 r^3 dr}{\sqrt{(a^2 + r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2 + r^2)}}$ ſimili modo integrationes abſoluendo erit $\int dx \int \frac{P^2 dy}{1 + P^2 + Q^2} =$

∫∫

$\iint \frac{p^2 r x^2\, dx\, dr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$, vbi bis integrari oportet, altera vice x altera vero r et p ponendo conſtantes; poſito igitur primo r conſtante, erit $\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2 r^2 dr}{a} \left(\frac{\sqrt{(a^2+p^2(a^2+r^2))}}{p\sqrt{(a^2+r^2)}} \right) = \int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \left(\frac{a^2+a^2p^2+p^2r^2}{a^2p^2+p^2r^2} \right)$. Facto ergo poſt integrationem $r = CB$ ſeu $u = 0$ prodibit vis reſiſtentiae, qua corpus verticaliter ſurſum vrgebitur $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \left(\frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} \right)$. Denique ad locum applicationis huius vis, qui ſit in O inueniendum bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{p^2 r^2 (x^2 - pru) dx\, dr}{axx + app(aa+rr)}$. Ponatur primo x tantum variabile, poſitoque poſt integrationem $x = a$ habebitur pro altera integratione $\int p^2 r^2 dr \left(1 - \frac{(p(a^2+r^2)+ru)}{a\sqrt{(a^2+r^2)}} \text{A tang.} \frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}} \right)$; quod integrale, cum poſitum fuerit $u = 0$, diuiſum per integrale ante inuentum $\int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \left(\frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} \right)$ dabit diſtantiam AO puncti O, per quod reſiſtentiae vis verticalis tranſit a prora A. Q. E. I.

Coroll. 1.

652. Quaecunque ergo curua pro baſi B D b accipiatur, reſiſtentiae motui contrariae determinatio, quae eſt $= \frac{-2v}{a} \int \frac{p^2 c^3 dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}} \text{A tang.} \frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ quadraturam circuli requirit. At contra reſiſtentiae vis, quae ſurſum vrget pendet a logarithmis.

Coroll. 2.

653. Ex his formulis etiam perſpicitur vtramque reſiſtentiae vim eo fore minorem quo maior ſit longitudo; vtraque etiam euaneſcit ſi ponatur $a = \infty$. Magis vero dum creſcit a, decreſcit vis reſiſtentiae horizontalis quam verticalis.

Coroll.

Coroll. 3.

654. Si longitudo AC $= a$ fuerit tam magna reſpectu baſis BDb, vt p et r prae a euaneſcant erit reſiſtentiae vis horizontalis $= \frac{-2v}{aa} \int p^2 r^3 dr$. A tang. $\frac{1}{p}$ reſiſtentiae vero vis verticalis erit $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \left(\frac{1+pp}{pp}\right.$.

Coroll. 4.

655. At ſi longitudo AC $= a$ euaneſcat vt tota figura abeat in ſolam baſem BDb tum reſiſtentia horizontalis fiet $= \frac{-2v}{a} \int p^2 r^2 dr$ A tang. $\frac{a}{pr} = -2v \int prdr = 2v \int udr$, prout per ſe patet; at reſiſtentia verticalis euaneſcet.

Coroll. 5.

656. Soliditas totius huius cono-cunei reperitur ex §. 617. quippe quae eſt $2\int - dx \int Q y dy = 2 \int -dx \int \frac{xprdr}{a}$. Quae cum x in priore integratione ſit conſtans, abit in $-2 \int \frac{xdx}{a} \int prdr = \int \frac{2xdx}{a} \int udr$, denotatque $\int udr$ aream CBD. Vnde tota ſoliditas $= a \int udr$, quae quidem ſponte patet.

Coroll. 6.

657. Superficies autem huius cono-cunei in aquam incurrentis eſt ex §. 616. $= 2 \int dx \int dy \, \gamma (1 + P^2 + Q^2) = 2 \int dx \int \frac{dr}{a} \sqrt{(x^2 + p^2 (a^2 + r^2))}$. Vnde bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{2dxdr}{a} \sqrt{(x^2 + p^2 (a^2 + r^2))}$, altera vice x altera r ponendo conſtans. Si autem primo r ponatur conſtans, erit integrale $\frac{xdr}{a} \sqrt{(x^2 + p^5 (a + r^2))} + \frac{p^2 dr (a^2 + r^2)}{a} \left(\frac{x + \sqrt{(x^2 + p^2 (a^2 + r^2))}}{p \sqrt{(a^2 + r^2)}}\right.$. Poſito igitur $x = a$, erit

erit ſuperficies cono-cunei quaeſita $= \int dr \sqrt{(a^2 + p^2(a^2 + r^2))}$ $+ \int \frac{p^2 dr(a^2 + r^2)}{a} \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + p^2(a^2 + r^2))}}{p\sqrt{(aa + rr)}} \right)$.

Coroll. 7.

658. Inuentio ergo ſuperficierum cono-cunei cuiuscunque pendet a logarithmis ſeu quadratura hyperbolae, atque inſuper ab aliis quadraturis, niſi formulae illae differentiales integrationem admittant.

Scholion.

659. Quamuis huiusmodi figurae, quas hic cono-cunei nomine appellamus, non ita pridem conſiderari coeperint, eas tamen hic tanquam ſecundam corporum ſpeciem proferre viſum eſt, quoniam magnam habent affinitatem cum corporibus conicis, quae nobis primam ſpeciem conſtituerunt. Quanquam enim, ſi ſimplicitatem conſtructionis ſpectemus, corpora cylindrica et priſmatica primo loco collocari merentur, tamen eas hic prorſus ne quidem attingemus, cum reſiſtentia, quam patiuntur, ex praecedentibus, quae de figuris planis ſunt prolata, facillime innoteſcat, ibique iam indicata ſit. Nam ſi omnes ſectiones horizontales ſunt inter ſe ſimiles et aequales, reſiſtentia obtinebitur ex reſiſtentia vnicae ſectionis, eam ducendo in altitudinem figurae. At ſi omnes ſectiones plano diametrali parallelae fuerint inter ſe aequales et ſimiles, tum pariter reſiſtentia habebitur reſiſtentiam vnicae ſectionis hanc per latitudinem multiplicando, quemadmodum attendenti ſponte patebit. Hic autem vocabulum cono-cunei in latiore ſenſu accipimus, quam Walliſius, cuiuam

enim quamcunque baſis BDb loco contemplamur, cum Walliſius circulum tantum aſſumſerit. Generatim autem omnium horum cono-cuneorum natura cognoſcetur ex aequatione canonica inuenta $dz = -\frac{apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$ in qua cum ſit p functio quaecunque ipſius r et $r = \frac{ay}{x}$, fiet p functio quaecunque ipſarum x et y nullius dimenſionis. Quare pro cono-cuneis erit: $dz = -\frac{ap(ydx - xdy)}{xx}$, et cum ſit $\frac{xdy - ydx}{xx} = d.\frac{y}{x}$ aequabitur z functioni nullius dimenſionis ipſarum x et y. Vnde ex quaque oblata aequatione pro quapiam ſuperficie perſpici poterit vtrum figura ſit cono cuneus an ſecus. Similiter natura corporum conicorum innoteſcet ex aequatione canonica ſupra inuenta $dz = \frac{udx}{a} - \frac{pydx}{x} + pdy$, quae cum ſit $u = \frac{az}{x}$ abit in hanc $\frac{dz}{x} - \frac{zdx}{xx} = \frac{pdy}{x} - \frac{pydx}{xx}$. Quoniam vero ob $r = \frac{ay}{x}$ eſt p functio quaecunque nullius dimenſionis ipſarum x et y, erit z = producto ex x in functionem nullius dimenſionis ipſarum x et y. Quoties igitur $\frac{z}{x}$ aequatur functioni nullius dimenſionis ipſarum x et y toties aequatio erit pro ſuperficie conica. Omnis ergo aequatio inter x et y et z, in qua hae tres variabiles vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt, naturam exprimet coni cuiusdam. At omnis aequatio inter x, y et z ita comparata vt tantum binae variabiles x et y vbique eundem dimenſionum numerum adimpleant, ſuperficiem cono-cunei cuiusdam exhibebit.

Exemplum 1.

660. Abeat baſis BDb cono-cunei in triangulum Iſoſceles, quo caſu corpus ABDb mixtum erit ex pyramide

mide et cuneo. Sit ſemi-latitudo huius baſis CB $= Cb = b$, et altitudo CD $= c$, erit $u = c - \frac{cr}{b}$, atque $p = -\frac{c}{b}$. Cum igitur reſiſtentiae, quam hoc corpus celeritate altitudini v debita ſecundum directionem CA promotum patitur, vis retrourgens in directione A C inuenta ſit $= \frac{-2v}{a}\int\frac{p^2r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\text{A tang.}\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ fiet ea hoc caſu $= \frac{2c^2v}{ab^2}\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\text{A tang.}\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}}$. Cum autem ſit $\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}} = \frac{2a^3}{3} + \frac{(r^2-2a^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}{3}$ erit $\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\text{A tang.}\frac{ab}{(c\sqrt{a^2+r^2})} = \frac{(r^2-2a^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}{3}$ $\text{A tang.}\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} + \frac{abc}{3}\int\frac{rdr(r^2-2a^2)}{a^2c^2+a^2b^2+c^2r^2} = \frac{(r^2-2a^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}{3}$ A tang.$\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} + \frac{abr^2}{6c} - \frac{a^3b(bb+3cc)}{3c^3}\,l\,\frac{cr+\sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2)}}{a\sqrt{(bb+cc)}} + \frac{2a^3}{3}$ A tang.$\frac{b}{c}$; tali addita conſtante, vt prodeat nihil poſito $r = 0$. Fiat nunc $r = b$, atque integra reſiſtentia quam figura in directione AC ſentiet, erit $= \frac{2ccv(bb-2aa)\sqrt{(a^2+b^2)}}{3ab^2}$ A tang.$\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{bcv}{3} - \frac{2a^2v(bb+3cc)}{3bc}\,l\,\frac{bc+\sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}}{a\sqrt{(b^2+c^2)}} + \frac{4a^3c^2v}{3bb}$ A tang.$\frac{b}{c}$. Deinde vis reſiſtentiae quae ſurſum vrget eſt $= \frac{v}{a}\int p^2r^2dr\,l\,\frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} = \frac{ccv}{abb}\int r^2dr\,l\,\frac{a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2}{cc(a^2+r^2)}$ quae expreſſio commodius exhiberi non poteſt, quamobrem ſufficiat reſiſtentiam, qua motus retardatur, quippe ad quam potiſſimum attendemus, determinaſſe per quantitates finitas.

Coroll. 1.

661. Si longitudo AC $= a$ fuerit vehementer magna prae b et c reſiſtentia commodius ex formula differentiali eruetur quae abibit in hanc $\frac{2ccv}{a^2b^2}\int r^2dr$ A tang. $\frac{b}{c}$, cuius integrale poſito $r = b$ eſt $= \frac{b^2c^2v}{2a^2}$ A tang. $\frac{b}{c}$; quae eſt reſiſtentia retardans.

Co-

Digitized by Google

Coroll 2.

662. Si igitur detur area baſis B D *b*, quae eſt *bc*, et longitudo A C fuerit perquam magna, reſiſtentia eo erit minor, quo minor fuerit fractio $\frac{b}{c}$, hoc eſt quo acutior fuerit angulus BD*b*. Maxima vero erit reſiſtentia, ſi capiatur ratio $b:c$ infinita magna, quo tamen caſu reſiſtentia erit finita ob A tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$.

Coroll. 3.

663. Per ſeriem etiam commode reſiſtentia exprimi poteſt generaliter pro quauis longitudine a. Cum enim ſit A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = \frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} - \frac{a^3b^3}{3c^3(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^5b^5}{5c^5(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$ — etc. erit, poſito poſt integrationem $r=b$ reſiſtentia $\frac{2c^2v}{abb}\int\frac{r^2dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = v\left(bc - \frac{2a^2(b^2+3c^2)}{3bc}\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2b} - \frac{a^4b(3bb+5cc)}{1.3.5.c^3(a^2+b^2)} + \frac{a^6b^3(5bb+7cc)}{2.5.7c^5(a^2+b^2)^2} - \frac{a^8b^5(7bb+9cc)}{2.7.9c^7(a^2+b^2)^3} + \frac{a^{10}c^7(5bb+11cc)}{4.9.11c^9(a^2+b^2)^4} - \text{etc.}\right.\right.$ quae vehementer conuergit ſi fuerit a valde paruum.

Coroll. 4.

664. Si autem ſeries deſideretur, quae vehementer conuergat, ſi ſit a quantitas valde magna, reperietur reſiſtentia motum retardans $= \frac{4a^2c^2v}{3bb}$ Atang. $\frac{b}{c} - \frac{2ccv(2a^2-b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{3ab^2}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2)}} - \frac{2bc^3v}{3(bb+cc)} + \frac{v(b^2+3c^2)}{3bc}\left(\frac{b^4c^4}{2a^2(b^2+c^2)^2} - \frac{b^6c^6}{3a^4(b^2+c^2)^3} + \frac{b^8c^8}{4a^6(b^2+c^2)^4} - \text{etc.}\right.$

Co-

Digitized by Google

Coroll. 5.

665. Soliditas vero huius corporis reperitur $= \frac{abc}{2}$, ſuperficies autem eius baſi et ſectione aquae exceptis erit $= \int\frac{r}{b} \surd (a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2) + \frac{cc}{abb}\int dr\,(a^2 + r^2)\,(\frac{ab + \surd(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2)}{c\surd(a^2 + r^2)}$. Cuius integrale poſito $\frac{bb + cc}{cc} = m$, et facto $r = b$, reperitur $= \frac{c}{2}\surd(ma^2 + b^2) + \frac{ma^2c}{2b}(\frac{b + \surd(ma^2 + b^2)}{a\surd m} + \frac{cc(3aa + bb)}{3ab}(\frac{ab + c\surd(ma^2 + b^2)}{c\surd(a^2 + b^2)} + \frac{cc}{3bb}\int\frac{(3a^2 + r^2)((m-1)ac + b\surd(ma^2 + r^2))r^2dr}{(a^2 + r^2)(ab + c\surd(ma^2 + r^2))\surd(ma^2 + r^2)}$ adeo vt integratio huius formulae reſtet.

Coroll. 6.

666. Caſus quo $m = 2$ ſeu $b = c$ aliquanto fit ſimplicior, prodit enim ſuperficies $= \frac{c}{2}\surd(2a^2 + c^2) + a^2(\frac{c + \surd(2a^2 + c^2)}{a\surd 2} + \frac{c(5a^2 + c^2)}{3a}(\frac{a + \surd(2a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} + \frac{1}{3}\int\frac{(3a^2 + r^2)r^2dr}{(a^2 + r^2)\surd(2a^2 + r^2)} = \frac{c}{3}\surd(3a^2 + c^2 + a^2(\frac{c + \surd(2a^2 + c^4)}{a\surd 2} + \frac{c(3a^2 + c^2)}{3a}(\frac{a + \surd(2a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} + \frac{c}{3}\surd(3a^2 + c^2) + \frac{aa}{3}(\frac{c + \surd(a^2 + c^2)}{a\surd 2} - \frac{2a^2}{3}\,\text{A tang.}\,\frac{c}{\surd(2a^2 + c^2)}$. Erit ergo ſuperficies quaeſita $= \frac{2c}{3}\surd(2a^2 + c^2) + \frac{4a^2}{3}(\frac{c + \surd(2a^2 + c^2)}{a\surd 2} + \frac{c(3a^2 + c^2)}{3a}(\frac{a + \surd(a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} - \frac{2a^2}{3}\,\text{A tang.}\,\frac{c}{\surd(2a^2 + c^2)}$.

Coroll. 7.

667. Si inſuper ſit $c = a$; ita vt ſit $AC = CB = CD$ erit ſuperficies $= \frac{2aa}{\surd 3} + \frac{4aa}{3}((2 + \surd 3) - \frac{\pi a^2}{9}$; cuius expreſſionis valor proximus eſt $a^2 . 2, 56156$, ſeu ſuperficies ſe habet ad baſem proxime vt $2\frac{1}{2}$ ad 1.

Exemplum 2.

668. Sit nunc corpus noſtrum Walliſii cono-cuneus, ſeu baſis BD*b*, abeat in ſemicirculum, cuius ſemi-

 diame-

Digitized by Google

diameter ſit CB $=$ CD $= b$. Erit igitur $u = \sqrt{(b^2 - r^2)}$, ideoque $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hoc ergo valore ſubſtituto, inuenietur reſiſtentiae vis motum retardans $= \frac{2\mathfrak{v}}{a} \int \frac{r^3 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a\sqrt{(bb-rr)}}{r\sqrt{(aa+rr)}}$. Quamuis autem ſit $\int \frac{r^3 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}} =$

$$\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + (a^2-b^2)\sqrt{(a^2+r^2)} + \frac{b^4}{2\sqrt{(a^2+b^2)}} \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a^2+r^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$$

tamen hinc plenaria integratio non multum iuuatur. Deinde ſi arcus cuius tangens eſt $\frac{a\sqrt{b^2-r^2}}{r\sqrt{a^2+r^2}}$ in ſeriem reſoluatur, integratio quidem ſingulorum terminorum in $\frac{r^3 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{a^2+r^2}}$ ductorum facilior euaderet, ſed conſtans infinita eſſet addenda, quo prodeat nihil poſito $r = 0$. Hoc incommodum quodammodo euitatur ſi loco illius arcus, ſubſtituatur aequiualens $\frac{\pi}{2}$ — A tang. $\frac{r\sqrt{a^2+r^2}}{a\sqrt{bb-rr}}$, ſed quomodocunque calculus inſtituatur; nihil, cuius operae foret pretium deriuatur, quapropter cono-cuneos relinquamus, ad aliam corporum ſpeciem plurimum iam pertractatam, corporum ſcilicet rotundorum progreſſuri.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1. 669. *Sit ſectio aquae* ABb *curua quaecunque ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus* ACB, ACb *conſtans, atque omnes ſectiones verticales* STs *ad planum diametrale* ACD *normales ſemicirculi ſeu quod eodem redit, ſit corpus* ABDb *genitum conuerſione curuae* ACB *circa axem* AC; *hoc-*

hocque corpus moueatur in aqua directe in directione CAL; *determinare reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

Ex conſtructione huius corporis intelligitur non ſolum planum diametrale ATD ſed omnes ſectiones per axem AC tranſeuntes fore curuas ſimiles et aequales ſemiſectioni aquae ASBC. Cum igitur curua ASB data ponatur, vocatis $AP = x$, et $PS = PT = s$, dabitur aequatio inter x et s, ſeu s erit functio quaedam ipſius x, ita vt ſi ponatur $ds = p\,dx$ futura ſit p pariter functio ipſius x. Sumtis nunc reliquis ambabus coordinatis $PM = y$ et $MQ = z$ quoniam ſectio SQTs eſt ſemicirculus centro P deſcriptus cuius radius eſt $PS = PT = s$, erit $z^2 + y^2 = s^2$ et $z = \sqrt{(s^2 - y^2)}$; vnde fit $dz = \frac{s\,ds - y\,dy}{\sqrt{(s^2-y^2)}} = \frac{ps\,dx - y\,dy}{\sqrt{(s^2-y^2)}}$, qua aequatione natura ſuperficiei huius corporis exprimitur. Haec ergo aequatio ſi comparetur cum canonica ſupra aſſumta $dz = P\,dx + Q\,dy$, fiet $P = \frac{ps}{\sqrt{(s^2-y^2)}}$ et $Q = \frac{-y}{\sqrt{(s^2-y^2)}}$. Ponamus iam ſectionem BDb omnium ſibi parallelarum eſſe ampliſſimam exiſtente $AC = a$, ſeu latitudinem Bb eſſe maximam; ac tota ſuperficies ABDb reſiſtentiam patietur; ſitque celeritas qua hoc corpus in aqua progreditur ſecundum directionem AL debita altitudini v. His praemiſſis ex prop. 61 reſiſtentia ſequenti modo definietur: cum ſit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{(1+p^2)s^2}{ss-y^2}$; erit $\frac{P^3\,dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^3 s\,dy}{(1+pp)\sqrt{(ss-y^2)}}$ et $\frac{P^2\,dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2\,dy}{1+p^2}$ atque $\frac{P^2(x+Pz)\,dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2(x+ps)\,dy}{1+p^2}$, quae differentialia ponendo x et quantitates inde pendentes p et s conſtantes ita ſunt accipienda vt euaneſcant poſito $y = 0$, quo facto

facto poni debet $y = PS = s$. Hoc autem modo reperietur $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{\pi p^3 s}{2(1+p^2)}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt 1; et $\int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s}{1+p^2}$, atque $\int \frac{p^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s(x+ps)}{1+pp}$. Nunc poſitis x et p et s variabilibus habebitur reſiſtentiae vis horizontalis, qua corpus in directione AC repellitur $= \pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+p^2}$ in quo integrali, cum ita fuerit acceptum, vt euaneſcat poſito $x = 0$, fieri debet $x = a$. Deinde vis reſiſtentiae, qua corpus ſurſum vrgebitur eſt $= 2v \int \frac{p^2 s dx}{1+pp}$, haecque vis tranſibit per punctum axis O exiſtente $AO = \frac{\int \frac{p^2 s dx(x+ps)}{1+pp}}{\int \frac{p^2 s dx}{1+pp}}$, ſingulis his integralibus ita acceptis vt euaneſcant poſito $x = 0$, atque tum facto $x = a$. Q. E. I.

Coroll. 1.

670. Si ſectio aquae AB*b* in B habuerit tangentem ad B*b* normalem ſeu axi AC parallelam, tum omnia plana ſuperficiem tangentia in punctis H ſectionis BD*b* ad hanc ipſam ſectionem erunt normalia.

Coroll. 2.

671. Simili modo quem angulum tangens ſectionis aquae in S conſtituit cum axe PA, eundem angulum plana tangentia omnia in ſingulis punctis Q ſectionis ST*s* cum axe PA conſtituent: ex quo ſingula elementa Q ſectionis ST*s* eandem patientur reſiſtentiam, quam patitur aequale elementum in S ſitum.

Co-

Coroll. 3.

672. Ad ſoliditatem totius huius corporis cognoſcendam ex §. 617 primum integrandum eſt differentiale $-Qydy = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ss-yy)}}$, cuius integrale poſito $y = s$ poſt integrationem eſt $= \frac{\pi ss}{4}$. Vnde tota ſoliditas fit $= \frac{\pi}{2} \int ss dx$ poſito poſt integrationem $x = a$

Coroll. 4.

673. Deinde cum ſuperficies $ABDb$ in genere ſit $= 2 \int dx \int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$, erit ſuperficies ſolidi noſtri rotundi $= 2 \int dx \int \frac{s dy \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(ss-yy)}} = \pi \int s dx \sqrt{(1+pp)}$, in quo integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $x = 0$, fieri debet $x = a$.

Coroll. 5.

674. Si integrum ſolidum rotundum, quod generatur dum figura ACB circa axem AC penitus conuertitur in aqua ſecundum directionem axis CAL moueatur, tum reſiſtentiam motui directe contrariam patietur duplo maiorem, eaque ideo erit $= 2 \pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$.

Scholion.

675. Huiusmodi corpora rotunda fere ſola ab iis, qui reſiſtentiam calculo inueſtigarunt, ſunt conſiderata, longe alio autem modo in eorum reſiſtentiam inquiſiuerunt, huic corporum ſpeciei proprio. Deriuauerunt enim reſiſtentiam ex ea conſideratione, quam corollario ſecundo indicauimus, quae via quamquam eſt multo facilior, quam ea quam hic ſumus ſecuti, tamen quoniam ad alias corporum ſpecies non patet, methodo generali vti maluimus. Hinc autem generatim innoteſcit natura omnium corporum rotun-

tundorum per aequationem generalem pro iis inuentam $z^2+y^2 = s^2$ ſcilicet ſumtis abſciſſis x in axe AC eſt ſemper z^2+y^2 aequale functioni cuidam ipſius x, et quoties talis aequatio occurrit, toties ea erit ad ſolidum rotundum. Sed quo reſiſtentia huiusmodi corporum plenius cognoſcatur, iuuabit caſus nonnullos particulares euoluere, quibus determinata curua pro ſectione aquae ACB accipitur.

Exemplum 1.

Tab. XXVIII fig. 2.

676. Sit primo ſectio aquae ABb triangulum iſoſceles, ſeu corpus ABDb ſemiſſis coni recti circularis, qui caſus, quanquam iam ante eſt pertractatus, tamen cum hic etiam affere viſum eſt, quo conuenientia magis perſpiciatur, atque ipſa propoſitio illuſtretur. Poſita itaque ſemidiametro baſis BC = CD = b erit $a : b = x : s$, ideoque $s = \frac{bx}{a}$, et $p = \frac{b}{a}$. Vnde reſiſtentiae vis horizontalis erit $= \pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+p^2} = \frac{\pi b^4}{aa} v \int \frac{x dx}{a^2+b^2} = \frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$ vis verticalis autem ex reſiſtentia orta, qua corpus ex aqua eleuabitur erit $= 2v \int \frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{2b^3 v}{a} \int \frac{x dx}{aa+bb} = \frac{ab^3 v}{a^2+b^2}$. Denique punctum O in quo haec vis erit applicata, ita definietur: cum ſit AO $= \frac{\int p^2 s dx (x+ps):(1+pp)}{\int p^2 s dx (1+pp)}$ erit pro noſtro caſu AO $= \frac{(aa+bb)\int xx dx}{aa \int x dx} = \frac{2(aa+bb)}{3a}$, quae omnia apprime conueniunt cum ſupra §. 639 inuentis.

Exemplum 2.

Tab. XXX. fig. 1.

677. Sit ſectio aquae ABb ſemicirculus centro C deſcriptus, cuius propterea radius AC = CB = CD erit $= a$: hoc ergo caſu corpus noſtrum abibit in quartam partem ſphaerae centro C radio AC $= a$ deſcriptae. Ex na-

Digitized by Google

natura circuli igitur erit $s = \surd(2ax-xx)$ atque $p = \frac{a-x}{\surd(2ax-xx)}$; et $1+pp = \frac{aa}{2ax-xx}$. His ſubſtitutis prodibit $\frac{p^3 s dx}{1+pp} = \frac{(a-x)^3 dx}{aa}$ cuius integrale eſt $\frac{a^2}{4} - \frac{(a-x)^4}{4a^2}$, quod poſito $x = a$ fit $= \frac{a^2}{4}$. Reſiſtentia igitur horizontalis, quam hoc ſphaerae fruſtum in motu ſuo ſentiet, erit $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Deinde cum ſit $\frac{p^3 s dx}{1+pp} p = \frac{(a-x)^3 dx}{aa} \surd(2ax-xx)$, erit eius integrale poſito $x = a$ poſt integrationem $= \frac{\pi a^2}{16}$, vnde corpus hoc verticaliter ſurſum vrgebitur a reſiſtentia vi $= \frac{\pi a^2 v}{8}$. Denique cum ſit $x + ps = a$, erit $\int \frac{p^3 s dx(x+ps)}{1+pp} = \int \frac{(a-x)^3 dx}{a} \surd(2ax-xx) = \frac{\pi a^3}{16}$, ex quo punctum O per quod reſiſtentiae vis verticalis tranſit, ipſum ſphaerae centrum C incidet. Soliditas porro huius ſphaerae quadrantis erit $= \frac{\pi}{2} \int ss\,dx = \frac{\pi}{2} \int (2ax-xx) dx = \frac{\pi a^3}{3}$, atque ſuperficies eius $= \pi \int s\,dx \surd(1+pp) = \pi \int a\,dx = \pi a^2$; quae quidem ex natura ſphaerae ſponte fluunt.

Coroll. 1.

678. Vis igitur reſiſtentiae verticalis quae eſt $= \frac{\pi a^2 v}{8}$ duplo minor eſt quam eius vis horizontalis, qua motus retardatur. Media igitur directio reſiſtentiae tranſibit per C et in plano verticali diametrali ACD ſita angulum conſtituet cum AC cuius tangens erit $= \frac{1}{2}$.

Coroll. 2.

679. Cum baſis BDb area ſit $= \frac{\pi a^2}{2}$ ſi baſis nuda eadem celeritate ſecundum CA moueretur in aqua, foret eius reſiſtentia $= \frac{\pi a^2 v}{2}$; ita vt reſiſtentia horizontalis figurae ABDb duplo ſit minor, quam reſiſtentia baſis.

Digitized by Google

Coroll. 3.

680. Intelligitur etiam quantam reſiſtentiam patiatur globus integer in aqua motus; cum enim eius ſemiſſis reſiſtentiae ſit oppoſita, erit reſiſtentia ipſa $= \frac{\pi a^2 v}{4}$, ſi eius radius ponatur $= a$. Globus itaque in aqua motus duplo minorem patitur reſiſtentiam, quam eius circulus maximus.

Coroll. 4.

681. Hinc reſiſtentia, quam diuerſi globi in aqua moti patiuntur erit in ratione compoſita ex duplicata diametrorum et duplicata celeritatum, quibus progrediuntur.

Exemplum 3.

682. Sit figura aquae innatans ABDb ſphaeroidis elliptici portio, eiusmodi vt ſectio aquae ABb ſit ſemiellipſis centrum habens in C cuius ſemiaxes coniugati ſint AC$=a$ et BC$=b$, erit ex natura ellipſis $s = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$ hincque $p = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{(2ax-xx)}}$ et $1 + pp = \frac{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}{a^2(2ax-xx)}$. Ad reſiſtentiam igitur cognoſcendam ſequentes formulae integrales ſunt conſideraudae, quarum prima eſt $\int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$, quae abit in $\frac{b^4}{a^2}\int \frac{(a-x)^3 dx}{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}$, cuius integrale eſt $\frac{-b^4}{2(a^2-b^2)} + \frac{a^2b^4}{(a^2-b^2)^2} l \frac{a}{b}$. Ex hoc vis reſiſtentiae motui contraria cuius directio eſt AC erit $= \pi b^2 v (\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} l \frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2-b^2)})$ vel eadem vis per ſeriem expreſſa erit $= \frac{\pi b^4 v}{2a^2}(\frac{1}{2} + \frac{a^2-b^2}{3a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{4a^4} + \frac{(a^2-b^2)^3}{5a^6} + \frac{(a^2-b^2)^4}{6a^8} + \text{etc.})$ quae eo magis conuergit, quo minor fuerit differentia inter a et b. Deinde cum ſit $\int \frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{b^3}{a}\int \frac{(a-x)^2 dx \sqrt{(2ax-xx)}}{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2}$,

erit

erit eius integrale poſito $x = a$, ſequens quantitas $\frac{\pi a b^3}{4(a+b)^2}$; vnde vis reſiſtentiae verticalis eſt $= \frac{\pi a b^3 v}{(a+b)^2}$; ipſam autem directionem hujus vis ſeu locum applicationis ob prolixitatem calculi non determinamus.

Coroll. 1.

683. Si ellipſis ABb abeat in circulum ita vt ſit $a = b$; tum reſiſtentia horizontalis a logarithmis liberabitur, fietque per ſeriem datam $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Vis vero qua ſurſum pellitur fiet $= \frac{\pi a^2 v}{8}$, vti ante iam eſt inuentum.

Coroll. 2.

684. Si ellipſis ABb quam minime a circulo diſcrepet ita vt ſit $b = a + \alpha$, denotante α quantitatem valde exiguam, erit ex ſerie reſiſtentiae vis horizontalis ſecundum $AC = \frac{\pi a^2 v}{4} + \frac{2\pi a \alpha v}{3} = \frac{\pi b^2 v}{4} + \frac{\pi b \alpha v}{6}$, ob $a = b - \alpha$.

Coroll. 3.

685. Manente igitur axe $AC = a$, reſiſtentia eo maior euadet, quo magis creſcit $BC = b$. At ſi b maneat eadem, reſiſtentia deſcreſcet creſcente axe $AC = a$. Atque ex ipſa reſiſtentiae expreſſione $\pi b^2 v \left(\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)} \left(\frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)^2} \right) \right.$ intelligitur ſi a fiat infinite magnum, tum reſiſtentiam penitus euaneſcere.

Coroll. 4.

686. Reſiſtentia igitur motum retardans diminuetur augendo longitudinem ſphaeroidis elliptici AC atque diminuendo latitudinem $BC = b$. Vnde quo magis axes ellipſis fuerint inter ſe inaequales, eo minor euadet reſiſtentia.

Coroll. 5.

687. Cum ſoliditas in genere ſit $=\frac{\pi}{2}\int ss\,dx$ erit pro noſtro caſu ſoliditas ſphaeroidis elliptici A B D $b=\frac{\pi b^2}{2aa}\int(2ax-xx)dx=\frac{\pi ab^2}{3}$: poſito poſt integrationem $x=a$.

Coroll. 6.

688. Superficies denique huius ſphaeroidis, quae in genere eſt $\pi\int s\,dx\,\surd(1+pp)$, fiet $=\frac{\pi b}{a^2}\int dx\,\surd(a^2b^2+2a(a^2-b^2)x-(a^2-b^2)x^2)$: quae expreſſio poſito $a-x=u$ tranſit in hanc $-\frac{\pi b}{a^2}\int du\,\surd(a^4-(a^2-b^2)u^2)=\frac{-\pi a^2 b}{2\surd(a^2-b^2)}$ (A ſin. $\frac{u\surd(aa-bb)}{8a}+\frac{u\surd(aa-bb)}{a^4}\surd(a^4-(aa-bb)uu)+\frac{\pi a^2 b}{2\surd(a^2-b^2)}$ (A ſin. $\frac{\surd(a^2-b^2)}{a}+\frac{b\surd(aa-bb)}{a^2}$. Poſito ergo $x=a$ ſeu $u=0$ prodibit tota ſuperficies $=\frac{\pi a^2 b}{2\surd(a^2-b^2)}$ (A ſin. $\frac{\surd(a^2-b^2)}{a}+\frac{b\surd(a^2-b^2)}{aa}$) $=\frac{\pi bb}{2}+\frac{\pi a^2 b}{2\surd(a^2-b^2)}$ A ſin. $\frac{\surd(a^2-b^2)}{a}$.

Coroll. 7.

689. Quare ſi a et b non multum a ſe inuicem diſcrepent, ob A ſin. $\frac{\surd(a^2-b^2)}{a}=$ A tang. $\frac{\surd(a^2-b^2)}{b}=\frac{\surd(a^2-b^2)}{b}-\frac{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3}+\frac{(a^2-b^2)^{\frac{5}{2}}}{5b^5}-$ etc. ſuperficiei inueniendae inſeruiet iſta expreſſio $\frac{\pi}{2}\left(bb+aa-\frac{a^2(aa-bb)}{3b^2}+\frac{aa(a^2-b^2)^2}{5b^4}-\frac{aa(a^2-b^2)^3}{7b^6}+\text{etc.}\right)$ quae vehementer eſt conuergens.

PROPOSITIO 65.
Problema.

Tab. XXX. fig. 1. 690. *Maneant vt ante omnes ſectiones verticales* S Ts *ad axem* AC *normales ſemicirculi*, *quaeraturque natura curuae* ASBC *ſeu ſectionis aquae quae formet eiusmodi ſolidum*

idum ABDb, *quod ſecundum directionem* CAL *in aqua motum minimam patiatur reſiſtentiam ſimul vero maxime ſit capax.*

Solutio.

Poſitis vt ante in ſectione aquae quaeſita abſciſſa AP $= x$, et applicata PS $= s$, atque $ds = p\,dx$; erit reſiſtentia, quam patietur ſolidum rotundum huic aquae ſectioni reſpondens; vt $\int \frac{p^3 s\,dx}{1+pp}$, quae ergo formula debet eſſe minimum. Hunc in finem differentietur $\frac{p^3 s}{1+pp}$, erit eius differentiale $\frac{p^3 ds}{1+pp} + \frac{(3p^2+p^4) s\,dp}{(1+pp)^2}$ ex quo ſecundum regulam ſupra datam §. emergit iſte valor $\frac{p^3}{1+pp} + \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$, qui poni deberet $= 0$, ſi ſolidum diſideretur, quod abſolute minimam pateretur reſiſtentiam. At cum inſuper ſoliditas debeat eſſe maxima, ſoliditas vero ſit vt $\int ss\,dx$ huicque formulae reſpondeat iſte valor $2s$. huius multiplum quodcunque illi valori aequale eſt ponendum. Hinc ergo obtinebitur iſta aequatio $\frac{2s}{c} = \frac{p^3}{1+pp} - \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$ multiplicetur per ds ſeu $p\,dx$, habebitur $\frac{2s\,ds}{c} = \frac{p^3 ds}{1+pp} - p\,d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2} = d. \frac{p^3 s}{1+pp} - d. \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)^2}$ vnde integrale erit $\frac{ss}{c} - f = \frac{p^3 s}{1+pp} - \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)} = \frac{-2p^3 s}{(1+pp)^2}$ ſeu $ss = cf - \frac{2cp^3 s}{(1+pp)^2}$; ex qua aequatione intelligitur fieri non poſſe $s = 0$, quod tamen conditio quaeſtionis requirit, niſi ſit $f = 0$. Ponatur ergo $f = 0$, et c negatiuum erit $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$. Cum autem ſit $ds = p\,dx$ erit $x = \frac{s}{p} + \int \frac{s\,dp}{pp} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} + 2c \int \frac{p\,dp}{(1+pp)^2} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} - \frac{c}{1+pp} +$ Conſt. vnde proueniet $x =$ Conſt. $- \frac{c+cpp}{(1+pp)^2}$. Quoniam vero x eodem caſu quo s euaneſcere debet, s autem duobus caſibus euaneſcat, quorum alter

ter

Digitized by Google

ter eſt ſi $p = 0$, alter ſi $p = \infty$, conſtans ex eo debet determinari. Sit igitur in puncto A, $p = 0$, ſeu tangens curuae A C in A incidat in ipſam rectam A L, fietque Conſt. $= c$, ex quo erit $x = \frac{3cpp + cp^4}{(1 + pp)^2}$, atque $s = \frac{2cp^3}{(1 + pp)^2}$, haecque curua generabit ſolidum, quod minimam patietur reſiſtentiam ob cuſpidem in A acutiſſimam, contra vero caſus, quo in A fit $p = \infty$, producet corpus maximae reſiſtentiae quippe qui caſus pariter in quaeſtione latet. Quamobrem curua quaeſita ita erit comparata vt abſciſſae $x = \frac{3cpp + cp^4}{(1 + pp)^2}$ reſpondeat applicata $s = \frac{2cp^3}{(1 + pp)^2}$ vnde intelligitur ſectionem aquae A S B quaeſtioni ſatisfacientem fore curuam algebraicam; quae ideo inter omnes alias aequalia ſolida generantes tale producet ſolidum, quod in directione axis A L motum minimam ſufferet reſiſtentiam. Q. E. I.

Coroll. 1.

691. Cum curua A S B, quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, ex eadem aequatione reſultet augendo abſciſſam x quantitate conſtante, intelligitur vtramque curvam tam eam ſcilicet quae ſolidum minimae reſiſtentiae, quam eam quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, portionem eſſe eiusdem curuae continuae.

Coroll. 2.

692. Quoniam igitur s duobus caſibus euaneſcit, ſeu curua A S B in duobus punctis axi A C occurrit, primo nimirum ſi $p = 0$ quo caſu etiam x fit $= 0$, et tum ſi $p = \infty$, quo caſu fit $x = c$, prior concurſus dabit curvam

vam producentem minimam reſiſtentiam poſterior vero curuam, cui ſolidum maximae reſiſtentiae reſpondet.

Coroll. 3.

693. Quia aequatio inuenta $ss = cf - \frac{2cp^3 s}{(1+pp)^2}$ poſito $f = 0$, diuiſibilis eſt per s, patet aequationem $s = 0$ caſum quoque continere in quaeſtione contentum. Perſpicuum autem eſt hunc caſum praebere eam curuam quae producit ſolidum minimae capacitatis.

Coroll. 4.

604. Cum ſit $x = \frac{3cp^2 + cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ intelligitur continuo ipſi p maiorem valorem tribuendo initio facto a $p = 0$, tam x quam s vsque ad certum terminum creſcere, deinde vero iterum decreſcere. Maxima autem erunt x er s ſi fiat $p = \sqrt{3}$, ſeu eo loco vbi tangens curuae cum axe AC angulum conſtituit 60. Erit autem hoc caſu $x = \frac{9c}{8}$ et $s = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$.

Coroll. 5.

695. Si autem haec aequatio cum §. 532. comparetur, deprehendetur haec curua congruere cum ea curva ſupra inuenta, quae inter omnes alias eandem aream continentes patiatur minimam reſiſtentiam. Curua igitur hic inuenta erit curua illa triangularis AMBCDNA. Tab. XXIV. fig. 1.

Coroll. 6.

696. Huius igitur curuae portio AMB circa axem AC rotata producet ſolidum, quod ſimul maximam habe-

Digitized by Google

bit capacitatem, atque ſecundum directionem axis CA motum minimam patietur reſiſtentiam. Altera vero portio BCD circa axem eundem CE rotata ſolidum dabit maximam reſiſtentiam patiens.

Coroll. 7.

697. In hac igitur curua, quae ad axem ACE vtrinque ſibi eſt ſimilis et aequalis ipſe axis CA erit tangens in A; vnde aſcendet et deſcendet vsque ad B et D, exiſtente $AE = \frac{9c}{8}$ et $BE = DE = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$. Deinde ex cuspidibus B et D cum axe in C vnitur exiſtente $AC = c$: eius vero tres portiones AMB, BCD et AND inter ſe aequales erunt et ſimiles.

Scholion.

698. Problema iſtud ab aliis, qui hoc argumentum pertractauerunt, omiſſa ea conditione, qua ſimul ſolidum capaciſſimum requiritur, proponi eſt ſolitum, ita vt inter omnes omnino curuas eam determinare ſint conati, quae circa axem rotata ſolidum producat quod in directione axis motum minimam pateretur reſiſtentiam. At hoc modo nulla inuenitur curua idonea quaeſito ſatisfaciens, reſoluetur enim iſte caſus ex noſtra ſolutione ponendo $c = \infty$, unde fit $s = \frac{f(1+pp)^2}{2p^3}$ ex quo nunquam fieri poteſt $s = 0$, ideoque curua deſiderata cum axe nunquam concurreret, id quod eſt contra conditionem intentam. Hancobrem iſtam quaeſtionem hic penitus omittere viſum eſt, eiusque loco praeſentem proponere; qua praeter minimam reſiſtentiam maxima capacitas requiritur. Haec enim quaeſtio eo magis ad inſtitutum noſtrum eſt accommodata, cum in naui-

bus

bus non ſolum minima reſiſtentia deſideretur, ſed ſimul naues maxime capaces eſſe oporteat. Facile autem perſpicitur figuram inuentam nimis abhorrere a figuris nauium conſuetis, aliasque circumſtantias prohibere, quominus nauibus talis figura vel ſaltem affinis tribuatur. Ceterum notatu dignum euenit quod curua inuenta ſit algebraica; cuius vero ordinis ſit, eliminando p ita inueſtigabitur. Cum ſit $x = \frac{3cp^2 + cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ erit $\sqrt{(xx - 3ss)} = \frac{3cpp - cp^4}{(1+pp)^2}$ indeque $\frac{x}{\sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{3+pp}{3-pp}$; vnde fit $pp = \frac{3x - 3\sqrt{(xx-3ss)}}{x + \sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{(x - \sqrt{(xx-3ss)})^2}{ss}$ et $p = \frac{x - \sqrt{(xx-3ss)}}{s}$. porro eſt $pp + 1 = \frac{2xx - 2ss - 2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$, atque $pp + 3 = \frac{2xx - 2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$. His autem valoribus in aequatione $(1+pp)^2 x = cpp(3+pp)$ ſubſtitutis atque irrationalitate ſublata emerget iſta aequatio $4s^4 + 8xxss - 36cxss + 27ccss - 4cx^3 + 4x^4 = 0$. Poſito autem $c = 2a$ orietur iſta aequatio $s^4 + 2xxss - 18axss + 27a^2ss - 2ax^3 + x^4 = 0$, ita vt curua ſatisfaciens inuenta pertineat ad lineas quarti ordinis. Ex hac igitur aequatione elicitur $ss = -xx + 9ax - \frac{27}{2}a^2 \pm \frac{(a-4x)\sqrt{a(9a-4x)}}{2}$, vnde conſtructio curuae non ſit difficilis. Commodius vero partis huc ſeruientis AMB natura cognoſcetur ex hac ſerie $ss = xx\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{4x}{9a} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 8} \cdot \frac{4^2 \cdot x^2}{9^2 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{4^3 \cdot x^3}{9^3 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{4^4 \cdot x^4}{9^4 \cdot a^4} + \right.$ etc. vel poſito $\frac{9a}{4} = b$, vt ſit $b = \frac{9c}{8} = $ AE erit $ss = xx\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x}{b} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 8}\frac{x^2}{b^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{6 \cdot 8 \cdot 10 b^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^4}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 b^4} + \text{etc.}\right)$ ex qua aequatione facile intelligitur tangentem in A in axem AC incidere, quod ex aequatione ſuperiore difficilius perſpicitur. Nunc autem ad alias corporum ſpecies progrediamur minus determinatas quam hactenus tractatae, in quibus ſcilicet duae curuae ſuperſint arbitrariae.

PROPOSITIO 66.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1. 669. *Sit non ſolum ſectio aquae* ABb *ſed etiam ſectio ampliſſima* BDb *curua quaecunque data, ſolidumque* ABDb *hanc habeat proprietatem, vt omnes ſectiones verticales* STs *ad axem* AC *normales ſint ſectioni* BDb *ſimiles atque moueatur hoc corpus in aqua ſecundum directionem* CAL *determinari oportet reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

Primo cum ſectio aquae AB*b* ſeu potius eius ſemiſſis ACB ſit curua quaecunque data; ſumta in ea abſciſſa AP $= x$, et poſita applicata PS $= s$, erit s functio quaedam ipſius x data. Deinde cum etiam curua BD*b* ſeu potius eius ſemiſſis BDC data ſit poſitis ad eam coordinatis CG $= r$ et GH$= u$, dabitur aequatio inter u et r atque u aequabitur functioni cuidam ipſius r. Cum nunc ſectio STP ſimilis ſit ſectioni BDC, lineae in iis homologae tenebunt rationem vt PS ad CB. Poſito igitur CB $= b$, et pro ſectione SPT ſumtis coordinatis PM $= y$, et MQ $= z$ ſimilibus ipſis r et u, erit $y = \frac{rs}{b}$ et $z = \frac{us}{b}$. Cum nunc s ſit functio ipſius x, ponatur $ds = pdx$, vt p ſit functio ipſius x, ſimiliterque ob u functionem ipſius r ponatur $du = qdr$, vt q ſit functio ipſius r. His igitur factis erit $dy = \frac{rpdx}{b} + \frac{sdr}{b}$, et $dz = \frac{updx}{b} + \frac{sqdr}{b}$; vnde ob $\frac{sdr}{b} = dy - \frac{rpdx}{b}$ ſequens emergit aequatio inter tres coordinatas x, y, et z qua natura ſuperficiei propoſitae continetur. $dz = \frac{(u-qr)pdx}{b} + qdy$; quae cum generali aequatione in prop. 61. aſſumta

ſumta $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata praebet $P = \frac{(u-qr)p}{b}$ et $Q = q$, vbi notandum quantitates s et p a ſola x pendere, u vero et q ab r, atque r et x a ſe mutuo non pendere. Ad reſiſtentiam iam motui contrariam inueniendam oportet primum huius formulae $\frac{p^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ poſito x conſtante integrale reperire, atque poſt integrationem facere $y = s$. Quoniam igitur x eſt conſtans, erit $dy = \frac{s\,dr}{b}$, atque ob $1 + P^2 + Q^2 = \frac{b^2 + (u-qr)^2 p^2 + b^2 q^2}{b^2}$ fiet $\frac{p^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-qr)^2}$ in cuius integrali capiendo p et s tanquam quantitates conſtantes conſiderari debent. Inuento igitur integrali $\frac{p^3 s}{b^2}\int \frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$ ita vt euaneſcat poſito $r = 0$, tumque facto $r = b$, integrale hoc multplicandum eſt per dx, denuoque integrale capiendum, vnica enim inerit variabilis x, atque integratione peracta poni debet $x = AC = a$. Vel quod eodem redit iſta formula $\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-qr)^2}$ bis eſt integranda, in altera integratione x, p, et s ponendo conſtantia, in altera autem r, q et u; perinde enim eſt quaenam integratio prius inſtituatur. Deſignata autem quantitate, quae per duplicem integrationem, poſt quam poſitum eſt $r = b$ et $x = a$, prodit, per hanc formam $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-qr)^2}$ erit reſiſtentiae vis, quae ſecundum directionem AC retro pellit corpus $= \frac{2v}{bb}\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$. Simili autem modo rem peragendo reperietur reſiſtentiae vis verticalis corpus ſurſum ſollicitans $= \frac{2v}{b}\iint \frac{(u-qr)^2 p^2 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$. Denique ſi eodem modo quaeratur valor $\iint \frac{(u-qr)^2(bbx + pus(u-qr))p^2 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-pr)^2}$ isque diuidatur per $\iint \frac{(u-qr)^2 p^2 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + pp(u-qr)^2}$ prodibit diſtantia A O, ex eaque ſitus puncti O per quod vis reſiſtentiae verticalis tranſit. Q. E. I.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 1.

700. Cum ſit $\frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = dr\,(\frac{(u-qr)^3}{b^2(1+qq)} - \frac{p^2(u-qr)^5}{b^4(1+qq)^2} + \frac{p^4(u-pr)^7}{b^6(1+qq)^3} - a)$ fiet $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 sdrdx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = \frac{1}{bb}\int p^3 sdx.\int\frac{(u-qr)^3 dr}{1+qq} - \frac{1}{b^4}\int p^5 sdx.\int\frac{(u-qr)^5 dr}{(1+qq)^2} + \frac{1}{b^6}\int p^7 sdx.\int\frac{(u-qr)^7 dr}{(1+qq)^3}$ — etc. in quibus integrationibus variabiles r et x, a ſe inuicem prorſus ſunt ſeparatae.

Coroll. 2.

701. Si igitur ſingulae formulae differentiales, in quibus tantum ineſt r et quantitates inde pendentes u et q ita integrentur vt euaneſcant poſito $r = b$; ſimilique modo alterae formulae integrales in quibus tantum inſunt x et s et p integrentur, tumque ponatur $x = a$; obtinebitur deſideratus valor formulae $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 sdrdx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$.

Coroll. 3.

702. Simili igitur modo reliquae formulae differentiales, quae duplicem integrationem requirunt, per ſeries ita exprimi poterunt, vt binae variabiles x et r prorſus a ſe inuicem ſeparentur; quo facto ſingulae ſine vllo reſpectu ad reliquas habito ſeorſim integrari poterunt.

Coroll. 4.

703. Cum ſoliditas corporis in genere ſit $= -2\int dx \int Qydy$, vbi in integtatione $\int Qydy$ ponitur x conſtans, erit pro noſtro caſu ob $y = \frac{rs}{b}$ et $dy = \frac{sdr}{b}$ atque $Q = q$, formula $\int Qydy = \int\frac{qrs^2 dr}{bb} = \frac{s^2}{b^2}\int rdu = -\frac{s^2}{b^2}\int udr$, vbi $\int udr$ denotat aream BCD vnde tota ſoliditas erit $= 2\int\frac{ssdx}{bb}\int udr$.

Co-

Coroll. 5.

704. Superficies vero ſolidi ABDb ex formula generali $2\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ inuenietur, quae ob x conſtans in altera integratione abit in $2 \iint \frac{sdrdx}{bb} \sqrt{(bb(1+qq)+pp(u-qr)^2)}$ vbi duplici integratione eſt opus, altera in qua r, altera in qua x ponitur conſtans.

PROPOSITIO 67.
Problema.

705. *Si data fuerit ſectio verticalis* BDb *ad axem* AC *normalis, cui omnes reliquae ſectiones ipſi parallelae* S Ts *ſint ſimiles; determinare curuam* ASB, *ex qua natum ſolidum* ABDb *pro capacitate ſua minimam patiatur reſiſtentiam, ſi quidem moueatur in aqua ſecundum directionem axis* CAL. Tab. XXX. fig. 1.

Solutio.

Manentibus vt ante, $BC=b$, $CG=r$, atque $GH=u$, poſitoque $du=qdr$, ita vt u et q futurae ſint functiones datae ipſius r; ſit $AP=x$ $PS=s$ ponaturque $ds=pdx$, quibus poſitis erit reſiſtentia vt $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,drdx}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$ quae quantitas ideo bis integrata minimum eſſe debet. Concipiatur autem integratio ea primum inſtitui in qua r cum inde pendentibus s et q ponitur conſtans, atque poſt integrationem fieri $x=AC=a$, manifeſtum eſt in altera integratione naturam curuae ASB non amplius contineri. Quo circa requiritur vt quantitas, quae per priorem integrationem prodit, reddatur minima Multiplicatum autem hic eſt dx per $\int \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$, in qua p et s tantum

tantum ſunt quantitates variabiles. Ponatur breuitatis gratia $u - qr = t$ et $1 + qq = w^2$, habebitur iſta formula $\int \frac{t^3 p^3 dr}{bb w^2 + ttp^2}$, quae differentiata ponendis ſemper r, t et w conſtantibus dat $p^2 ds \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + ttp^2} + pp\, dp \int \frac{(3b^2 w^2 + ttp^2) t^3 s\, dr}{(b^2 w^2 + ttp^2)^2}$ vnde oritur iſte valor ad determinationem minimi requiſitus $p^3 \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + ttp^2} - \frac{1}{dx}\, d.\, pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s\, dr}{(b^2 w^2 + ttp^2)^2}$, qui poni deberet $= 0$ niſi capacitatis ratio eſſet habenda. Capacitas vero eſt vt $\int ssdx \int udr$, in quo integrali multiplicatum eſt dx per $ss \int udr$, cuius differentiale eſt $2sds \int udr$, ex quo valor ad maximum determinandum inſeruiens eſt $2s \int udr$. His ergo valoribus coniunctis emerget iſta aequatio $\frac{2s \int udr}{c} = p^3 \int \frac{t^3 dr}{b^2 w^2 + ttp^2} - \frac{1}{dx}\, d.\, pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s\, dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$, quae multiplicata per $pdx = ds$, et integrata dat $\frac{ss \int udr}{c} - f^2 = \int \frac{t^3 p^3 s\, dr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} - \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 p^3 s\, dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} = - \int \frac{2b^2 w^2 t^3 p^3 s\, dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo ergo fieri queat $s = 0$, neceſſe eſt vt ſit $f = 0$; ita vt facto c negatiuo iſta habeatur aequatio pro curua quaeſita $s = \frac{2b^2 cp^3}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$ cui valor ſequens ipſius x valor reſpondebit $x = \int \frac{ds}{p} = \frac{s}{p} + \int \frac{sdp}{pp} = \text{Conſt.} + \frac{2b^2 cp^2}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} - \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{w^2 t\, dr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} = \text{Conſt.} - \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{(b^2 w^2 - t^2 p^2) w^2 t\, dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo x ſimul euaneſcat, ſi fit $p = 0$, quippe quo caſu ſimul fit $s = 0$, fiet $\text{Conſt.} = \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{t\, dr}{b^2}$ ita vt fiat $x = \frac{cpp}{\int udr} \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quoniam autem $\int udr$ valorem habet conſtantem ratione variabilium noſtrarum x, s et p, ea in conſtanti c comprehendatur; atque reſtitutis priſtinis valoribus pro w et t, haec habetur conſtructio: $x = \frac{cpp}{bb} \int \frac{(3b^2(1 + qq) + pp(u - qr)^2)(u - qr)^3 dr}{(b^2(1 + q^2) + p^2(u - qr)^2)^2}$ et $s = 2cp^3$

$\int (1 + p$

$\int\frac{(1+qq)(u-qr)^2dr}{(b^2(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^2}$. Quae formulae integrales conſtructionem minime turbant, cum in iis p conſtans ponatur, ideoque ex aequatione inter r et u data integratio actu abſolui queat; ita autem integratio abſolui debet vt prodeat o poſito $r=0$, quo facto faciendum eſt $r=b$. Q. E. I.

Coroll. 1.

706. Haec igitur curua pariter in A tangentem habebit in axem AL incidentem, cum initio quo tam x et s euaneſcunt ſit $p=0$. Inſuper vero alio loco curua in axem AC cadet, quod eueniet ſi $p=\infty$, hoc enim caſu fit $s=0$ et $x=\frac{c}{bb}\int(u-qr)dr=\frac{2c}{bb}\int udr$; ſeu x aequabitur areae baſis BDb ductae in $\frac{c}{bb}$, vel erit $x=\frac{2c\cdot BCD}{BC^2}$.

Coroll. 2.

707. In altero hoc puncto, vbi curua iterum in axem AC incidit, tangens erit normalis ad axem AC, ex quo iſta curuae portio ſolidum generabit maximam patiens reſiſtentiam.

Coroll. 3.

708. Cum inſuper axis AC ſit diameter curuae inuentae, quod conſtat ex eo, quia facto p negatiuo x manet, s vero in ſui negatiuum abit, curua non multum diſſimilis erit ei quam ante inuenimus, cum ſectio BDb ſit ſemicirculus.

Coroll. 4.

709 Ab initio autem vbi ſit $p=0$, creſcente p

 creſcent

creſcent tum abſciſſa x quam applicata s vsque ad certum terminum, qui terminus reperietur differentiando $\int \frac{p^3(1+qq)(u-qr)^3 dr}{(b^4(1+qq)+p^2(u-qr)^2)^2}$ poſito tantum p variabili, faciendoque differentiali $=0$.

Coroll. 5.

710. Abſoluta autem hac differentiatione reperietur ſequens aequatio ex qua valor ipſius p determinabitur $0=\int \frac{p^2(3b^2(1+q^2)-p^2(u-qr)^2)(1+q^2)(u-qr)^2 dr}{(b^2(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^3}$ quae integratio modo praeſcripto perfici debet, poſteaque poni $r=b$.

Coroll. 6.

711. Si fuerit $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ quod accidit, ſi curua BDb fuerit ſemicirculus, tum quantitas p ex formulis integralibus eliminari poterit. Erit nempe hoc caſu $x=\frac{cf^3p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$ et $S=\frac{2cf^3p^3}{(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$.

Coroll. 7.

712. Si igitur $\int dr\sqrt{(1+qq)}$ ſeu arcus BD tanquam quantitas conſtans in c comprehendatur fiet $x=\frac{c^3p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}$ et $S=\frac{2c^3p^3}{(bb+ffp^2)^2}$.

Scholion.

713. Notandum ceterum eſt hanc proprietatem, quae eſt $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ ſeu $-u+qr=f\sqrt{(1+qq)}$, in nullam aliam curuam praeter circulum competere. Nam ſumtis differentialibus ob $du=qdr$ erit $rdq=\frac{fqdq}{\sqrt{(1+qq)}}$ ideoque $r=\frac{fq}{\sqrt{(1+qq)}}$ vel etiam propter diuiſionem

dy

$dy = 0$, vnde primo linea recta dicta proprietate gaudet. Deinde cum ſit $u = qr - f\sqrt{(1+qq)}$ erit $u = \frac{fqq}{\sqrt{(1+qq)}} - f\sqrt{(1+qq)} = -\frac{f}{\sqrt{(1+qq)}}$. Erit ergo $\frac{r}{u} = -q$ vnde fit $r = \frac{fr}{\sqrt{(r^2+u^2)}}$ ſeu $f = \sqrt{(r^2+u^2)}$. Quia autem facto $u = 0$ fieri debet $r = b$ erit $f = b$, indeque $b^2 = r^2 + uu$. Caſus itaque memoratus quo fit $(u-qr)2 = ff(1+qq)$ locum non habet, niſi ſectio BDb, fuerit ſemicirculus vel triangulum iſoſceles. Denique id etiam hic generaliter locum habet, vt, quaecunque fuerit curua BDb, curua AB quaeſtioni ſatisfaciens ſemper euadat algebraica, cum formulae integrales conſtructionem algebraicam non afficiant.

PROPOSITIO 68.

Problema.

714. *Si data ſit corporis* ABDb *tum ſectio ampliſſima* BDb, *tum etiam figura ſpinae* ASD *ſeu ſectio diametralis* ACD, *ſolidumque ita ſit comparatum vt omnes ſectiones verticales parallelae ſectioni mediae* ACd *eidem ſint ſimiles: determinare reſiſtentiam, quam hoc corpus ſentiet, ſi curſu directo ſecundum directionem* CAL *in aqua promoueatur.* Tab. XXX. fig. 2.

Solutio.

Cum primo data ſit ſectio verticalis diametralis ACD dabitur aequatio inter eius abſciſſam AR $= r$ et applicatam RS $= s$, ita vt s aequetur functioni ipſius r futurumque ſit $ds = pdr$ exiſtente p pariter functione ipſius r. Deinde ſit interuallum AC $= a$, quo vertex A a ſectione ampliſſima BDb diſtat, atque pro hac ſectione

Digitized by Google

BDC ponatur abſciſſa CG$=y$, quippe quae aequalis euadet ſecundae variabili PM$=y$, trium illarum x, y et z, quae in aequationem localem totius ſuperficiei ingredientur, atque applicata GH$=u$, eritque ob hanc curuam cognitam u functio quaedam ipſius y, ita vt poſito $du=qdy$ futura ſit etiam q functio ipſius y; poſito vero $y=0$, abibit GH, u in CD, quae ſit $=c$ ita vt c tam fiat valor ipſius u poſito $y=0$ quam valor ipſius s poſito $r=a$. Iam cum ſectio FGH, parallela ſectioni ACD, eidem ſit ſimilis erit CD:AC$=$GH:FG, ex quo fit FG$=\frac{au}{c}$. Sumto nunc in ſectione FGH puncto M homologo puncto R in ſectione ACD erit FM$=\frac{ru}{c}$, et MQ$=z=\frac{su}{c}$. Porro ex M ad axem AC ducatur normalis MP$=y$, quippe quae aequalis eſt ipſi CG, et poſito AP$=x$ erit CP$=a-x=$GM$=\frac{au}{c}-\frac{ru}{c}$, vnde fit $x=a-\frac{(a-r)u}{c}$. Quare cum ex curuis ACD et BCD datis ſequentes variabilium x, y, et z habeamus valores $x=a-\frac{(a-r)u}{c}$; $y=y$ et $z=\frac{su}{c}$, erit $dx=\frac{-aqdy+rqdy+udr}{c}$; et $dz=\frac{sqdy+updr}{c}$ vbi cum ſit $\frac{udr}{c}=dx+\frac{aqdy-rqdy}{c}$ fiet $dz=pdx+\frac{(ap-rp+s)qdy}{c}$, quae aequatio cum canonica $dz=Pdx+Qdy$ comparata praebet $P=p$ et $Q=\frac{(ap-rp+s)q}{c}$, ita vt ſit $1+P^2+Q^2 \frac{c^2+c^2p^2+(ap-rp+s)^2q^2}{c^2}$: quae expreſſiones duas complectuntur quantitates variabiles a ſe inuicem non pendentes ſcilicet y, et per y datas u et q, atque r ex eaque datas s et p. Hinc erit $\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{c^2p^2dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ in cuius differentialis integratione tantum y eſt variabilis, atque r, s et p tanquam conſtantes ſpectantur. Integratione

autem

autem ita abſoluta vt prodeat o, poſito $y=0$ fieri debet $y=BC$ ſeu $u=0$; quo facto prodibit functio mera ipſius r quae in dx ducta denuo integrari debet. Sed cum dx poſito y conſtanti fiat $=\frac{udr}{c}$, ideoque ab y pendeat, duplex iſta integratio inuerſo modo eſt inſtituenda, ponendo primo y conſtans. Nam quoniam formula generalis ad reſiſtentiam definiendam eſt $\iint\frac{P^3dydx}{1+P^2+Q^2}$, quae duplicem integrationem requirit alteram poſito x conſtante, alteram poſito y conſtante, ea ob $dx=\frac{udr}{c}$ pro noſtro caſu abit in hanc $\iint\frac{cp^3udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ cuius valor pariter duplici integratione eſt eruendus, in quarum altera y cum u et q, in altera vero r cum p et s poni debet conſtans. Hocque modo rem abſoluendo perinde eſt vtra integratio primum abſoluatur. Vtraque autem integratio ita perfici debet, vt integralia per omnes valores variabilium r et y extendantur. Hoc ergo monito prodibit reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC repellens $=2cv\iint\frac{p^3udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ Reſiſtentiae vero vis verticalis corpus ſurſum vrgens erit $=2cv\iint\frac{p^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$. Ad cuius locum applicationis ſeu punctum O inueniendum ob $x+Pz=\frac{ac-(a-r)u+psu}{c}$ iſta quantitas $\iint\frac{(ac-(a-r)u+psu)p^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ diuidi debet per $\iint\frac{cp^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$, quotusque indicabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. 1.

715. Cum in ſectione aquae BAb applicata GF ad applicatam GH ſectionis ampliſſimae BDb conſtantem habeat rationem, curua CBA affinis erit curuae CBD, vt ſi data ſit curua CBA ſectio aquae ACB facillime innoteſcat.

Coroll. 2.

716. Huius igitur problematis ſolutio ſimilis manebit, ſi loco curuae BCD daretur ſectio aquae ACB; quamobrem dummodo omnes ſectiones verticales FGH inter ſe ſint ſimiles, perinde ſe habebit ſolutio, ſiue curva ACB detur ſiue altera BCD.

Coroll. 3.

717. Quoniam porro tota corporis ABDb ſoliditas generaliter eſt $= -2\iint Q\, y\, dy\, dx$ erit pro noſtro caſu ob $dx = \frac{udr}{c}$ et $Q = \frac{(ap-pr+s)q}{c}$ ſoliditas $= \frac{-2}{cc}\iint (ap-pr+s)\, qu\, y\, dr\, dy$.

Coroll. 4.

718. Harum duarum integrationum inſtituatur primum, in qua y, ſimulque u et q ponuntur conſtantes, fiet $\int (ap-pr+s)dr = \int s dr + \int (a-r) ds = t$ areae ACD ſi poſt integrationem ponatur $r = a$. Haec area ACD ergo ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{-2ff}{cc} \int q u y\, dy$.

Coroll. 5.

719. Deinde cum ſit $\int quy\, dy = \int uy\, du$ erit $\int quy\, dy = \frac{u^2 y}{2} - \frac{1}{2}\int u^2 dy = -\frac{1}{2}\int u^2 dy$ poſito $u = 0$. Quare tota ſoliditas prodibit $= \frac{2ff}{cc}\int u^2 dy$, quae expreſſio eadem ex natura conſtructionis oritur.

Scholion.

720. Quoniam figura ſectionis aquae ACB ex ſola ſectione ampliſſima BCD determinatur neque a figura ſe-

ſectionis diametralis ACD pendet, ſimul etiam iſta quaeſtio eſt reſoluta, qua ſolidi reſiſtentia quaeritur, quod ex datis curuis ACB et ACD ita generetur vt omnes ſectiones FGH plano diametrali ACD parallelae ſint inter ſe ſimiles; adeo vt non opus ſit hanc quaeſtionem ſeorſim tractare. Simili modo in caſu praecedente, quo datae erant ſectio aquae ACB et ſectio ampliſſima BCD huic autem parallelae ſectiones omnes SPT poſitae ſunt inter ſe ſimiles, curua ATD a ſola curua ASB determinatur vbique enim habet PT ad PS eandem rationem eam ſcilicet quam habet CD ad CB, ita vt curua ATD affinis ſit curuae ASB: voco autem curuas affines, quae communem habent abſciſſam, et quarum applicatae aequalibus abſciſſis reſpondentes datam inter ſe tenent rationem; ita omnes ellipſes vnum axem communem habentes ſunt ſecundum hanc definitionem curuae affines; ſed mox hanc definitionem pluribus euoluemus. Propter iſtam igitur affinitatem, quae inter ſectiones ACB et ACD intercedit alteram quaeſtionem etiam non attigimus, qua quaeri poſſet reſiſtentia eiusmodi ſolidorum, quae ex datis curuis BCD et ACD ita generantur vt omnes ſectiones SPT ſectioni ACD parallelae ipſi ſimul ſint ſimiles. Hinc etiam in ſequentibus, vbi omnes ſectiones horizontales inter ſe ſimiles ponuntur alterutram curuarum BCD et ACD pro data aſſumere ſufficiet, cum pari modo altera alteri ſit affinis. Hoc igitur pacto numerus problematum pertractandorum, ſi quidem perfectam enumerationem facere volemus, ad ſui medietatem diminuitur. Tab. XXX. fig. 1.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum 1.

Tab. XXX. fig. 2.

721. Ponamus omnes ſectiones verticales FGH. ſectioni diametrali ACD parallelas eſſe quadrantes circuli centris G deſcriptos, ſeu ſolidum ABDb generatum converſione figurae BDb circa axem immobilem Bb. Erit ergo ACB quadrans circuli, ideoque $c = a$, et $s = \sqrt{(2ar - rr)}$: vnde fit $p = \frac{(a-r)}{\sqrt{(2ar-rr)}}$ et $1 + pp = \frac{a^2}{2ar-rr}$ atque $ar - rp + s = \frac{aa}{\sqrt{(2ar-rr)}}$. His ſubſtitutis prodit reſiſtentiae horizontalis vis $= \frac{2v}{a^3} \iint \frac{(a-r)^2 u\,dr\,dy}{(1+qq)\sqrt{(2ar-rr)}}$. Ponatur primo u cum y et q conſtans, atque integrale $\int \frac{(a-r)^2 dr}{\sqrt{(2ar-rr)}}$ poſito poſt integrationem $r = a$ fiet $= \frac{2}{3}a^3$ quare vnica integratio reſtat, ideoque erit reſiſtentia queſita $= \frac{4v}{3} \int \frac{u\,dy}{1+qq}$, quod integrale ita eſt accipiendum, vt euaneſcat poſito $y = 0$, tumque ponatur $u = 0$. Reſiſtentiae autem vis verticalis, qua corpus ſurſum vrgebitur erit $= \frac{2v}{a^3} \iint \frac{(a-r)^2 u\,dr\,dy}{(1+qq)}$ prior vero integratio poſito y conſtante, facto $r = a$ dat $\int (a-r)\,dr = \frac{a^3}{3}$. Hinc ergo prouenit reſiſtentiae vis verticalis $\frac{2v}{3} \int \frac{u\,dy}{1+qq}$. Denique cum ſit $\frac{ac-(a-r)u+psu}{a} = a$, erit interuallum AO $= a$, ſeu punctum O, cui vis illa verticalis eſt applicata incidet in ipſum punctum C.

Coroll. 1.

722. In huiusmodi igitur corporibus, quae reſpectu axis Bb ſunt rotunda, reſiſtentiae vis horizontalis ad verticalem conſtantem habet rationem; ſcilicet reſiſtentia verticalis ſe habebit ad horizontalem vt 1 ad 2, ita vt vis verticalis ſit duplo minor, quam horizontalis.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 2.

723. Si ſectio ampliſſima BDb quoque fuerit ſemicirculus ita vt corpus fiat quadrans ſphaerae; ob CB $=$ CD $= a$, erit $u = \sqrt{(a^2-y^2)}$ et $q = \frac{-y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$; quare fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \int \frac{dy(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = \frac{3\pi a^2}{16}$; ita vt reſiſtentia horizontalis prodeat $= \frac{\pi a^2}{4}$ et verticalis $= \frac{\pi a^2}{8}$.

Coroll. 3.

724. Si ſectio ampliſſima BDb fiat triangulum iſoſceles, ita vt ſit BC $=$ C$b = b$ erit $u = a - \frac{ay}{b}$, et $q = \frac{-a}{b}$ Ex his fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \frac{ab}{aa+bb} \int (b-y)\,dy = \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$ · quare reſiſtentia horizontalis erit $= \frac{2ab^3}{3(aa+bb)}$ et verticalis $= \frac{ab^3}{3(a^2+b^2)}$

Coroll. 4.

725. Intelligitur ex hoc caſu reſiſtentiam ceteris paribus eo fore minorem, quo maius fuerit diſcrimen inter latitudinem BC et altitudinem CD. Manente enim b in his formulis, reſiſtentia fit maxima ſi ponatur $a = b$.

Exemplum 2.

726. Sint nunc omnes ſectiones verticales FGH, quae ſectioni diametrali ſunt parallelae quadrantes elliptici inter ſe ſimiles: eritque ſectio diametralis ACD pariter quadrans ellipticus cuius alter ſemiaxis AC $= a$, alter CD $= c$, vnde fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(2ar-rr)}$ atque $p = \frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$. Sit breuitatis gratia $a - r = t$, fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-t^2)}$ et $p = \frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $1+pp = \frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$ porroque $(a-r)p+s = \frac{ac}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$:

ex quibus fit $\frac{p^3 u dr dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2} = \frac{-ct^3 u dt dy}{(a^4(1+qq)-a(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Integretur primo haec formula ponendo y et u et q conſtantes, ita vt integrale euaneſcat poſito $t=a$, quo facto fiat $t=0$; orieturque $\frac{cudy}{a^2-c^2}\left(-1+\frac{a^2(1+qq)}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2q^2+c^2)}}\text{ A tang. }\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2q^2+c^2)}}\right)$ ſeu per ſeriem $\frac{cudy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}-\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$, quae commodiorem praeſtat vſum quam illa expreſſio, quippe quae ſi $c>a$ ceſſat a quadratura circuli penderet, ſed ad logarithmos reducitur. Hinc itaque reſiſtentiae vis horizontalis, quam hoc corpus ſentiet, erit $= 2c^2v\int\frac{udy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}-\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$ integratione ita abſoluta vt fiat integrale $=0$ ſi ponanur $y=c$, tumque poni debet $y=$ CB ſeu $u=0$.

Exemplum 3.

727. Sit nunc tam curua ACD quam BCD quadrans ellipticus, ita vt quadrantis elliptici ACD ſemiaxes ſint $AC=a$ et $CD=c$; alterius vero BCD ſemiaxes $BC=b$ et $CD=c$; erit ergo primo vt ante $s=\frac{c}{a}\sqrt{(2ar-rr)}$ et $p=\frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$ ſeu poſito $a-r=t$ erit $s=\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-tt)}$; $p=\frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ $1+p^2=\frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$; formulaque reſiſtentiae horizontali inueniendae inſeruiens $\frac{p^3 u dr dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ fiet $=\frac{ct^3 u dt dy}{a(a^4(1+qq)-(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Cum nunc porro ſit $u=\frac{c}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$ erit $q=\frac{-cy}{b\sqrt{(b^2-y^2)}}$ et $1+qq=\frac{b^4-(b^2-c^2)y^2}{b^2(bb-yy)}$, atque formula illa differentialis tranſibit in hanc

$$\frac{bc^2t^3dtdy(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a(a^4b^4-a^4(b^2-c^2)y^2-b^4(a^2-c^2)t^2+b^2(a^2-c^2)t^2y^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$$

cuius

cuius integrale poſito t conſtanti reperitur $= \frac{\pi b^2 c^2 t^3 dt}{4a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ $\left(\frac{2a^6 c^2 - b(3a^4c^2 - a^4b^2 + b^2(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}}{(a^4(bb-cc)-b^2(a^2-c^2)t^2)^2 \sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}} \right)$ quae formula denuo integrata poſitoque poſt integrationem $t = a$, ſi multiplicetur per $2cv$ dabit vim reſiſtentiae horizontalem qua motus retardabitur. Sed cum parum ad vtilitatem hinc concludi queat, per methodum maximorum et minimorum naturam curuae BCD definiamus, cui minima reſiſtentia reſpondeat.

PROPOSITIO 69.

Problema.

728. *Si data ſit ſectio diametralis* ACD *cui omnes ſectiones parallelae ſint ſimiles, determinare naturam curuae* BCD, *quae ſolidum generet quod in directione* CAL *motum pro ſua capacitate patiatur minimam reſiſtentiam.* Tab. XXX. fig. 2.

Solutio.

Manentibus vt ante $AR = r$, et $RS = s$ ob curvam ACD datam dabitur s et etiam p poſito $ds = pdr$ per r. Pro curua autem inuenienda ſit $CG = y$ et $GH = u$, et $du = qdy$, quibus poſitis minimum eſſe debebit haec expreſſio $\iint \frac{p^3 u dr dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ ſeu $\int u\, dy$ $\int \frac{p^3 dr}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{1+p^2}{p^3} = w^2$ et $\frac{(ap-rp+s)^2}{p^3} = t^2$, ita vt quantitates t et w ab y non pendeant; eritque formula minima reddenda haec $\int u\, dy$ $\int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ in qua cum dy multiplicatum ſit per $u \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ ſumatur eius differentiale ponendo ſemper r et w et t conſtantes, quod erit $du \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} - \int \frac{2ut^2 q\, dq\, dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ vbi ſigna ſummatoria tantum ad quantitates r, w, et t tanquam variabiles reſpicit, u vero et q ponit conſtan-

Digitized by Google

tes. Hinc igitur valor minimo inueniendo inſeruiens erit $\int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \frac{1}{dy} d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$, qui deberet poni $= a$ niſi ſimul capacitas eſſet in computum ducenda quae maxima eſſe debet. At capacitas eſt vt $\int u^2dy$, ex qua obtinetur iſte valor maximo inueniendo inſeruiens $2u$. Ex his igitur valoribus ſequens conficitur aequatio naturam curvae quaeſitae praebens $\frac{2u}{cf} = \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \frac{1}{dy} d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ Multiplicetur vtrinque per $du = qdy$, prodibit $\frac{2udu}{cf} = du \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + q\, d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} = d.\, u\int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \int \frac{2ut^2qqdr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} + q\, d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ cuius integrale eſt $\frac{u^2}{cf} = \int \frac{udr}{c^2w^2+t^2q^2} + \int \frac{2ut^2q^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} + \text{Conſt.} = \int \frac{u(c^2w^2+3t^2q^2)dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} + \text{Conſt.}$ Quoniam vero alicubi fieri debet $u = 0$, hoc autem nusquam euenire poteſt niſi ſit Conſt. $= 0$, erit $u = cf\int \frac{(c^2w^2+3t^2q^2)dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$. Verum cum ſit $du = qdy$, erit $y = \frac{u}{q} + \int \frac{udq}{qq}$ eſt autem $\int \frac{udq}{qq} = cf\iint \frac{(c^2w^2+3t^2q^2)drdq}{qq(c^2w^2+t^2q^2)^2} = b - cf\int \frac{dr}{q(c^2w^2+t^2q^2)}$, vnde fit $y = b + 2cf\int \frac{t^2q\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$. Quamobrem reſtitutis loco w^2 et t^2 aſſumtis valoribus iſta emerget curuae quaeſitae conſtructio: $y = b + 2cf \int \frac{p^3(ap-rp+s)^2dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$ et $u = cf\int \frac{(c^2(1+p^2)+3q^2(ap-rp+s)^2)p^3dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$. quae integrationes conſtructionem non impediunt, cum in iis q ponatur conſtans, ideoque non impediunt, quominus curua quaeſita ſit algebraica. Q. E. I.

Coroll. 1.

729. Quoniam u euaneſcit ſi ſit $q = \infty$ intelligitur curuae BD tangentem in B ad rectam CB eſſe normalem, ſeu verticalem hoc autem caſu prodit $y = b$: quare ſi dicatur $CB = b$, erit $b = b$. Coroll.

Coroll. 2.

730. Quia curua ex D progrediendo verſus B ad CB accedit, habebit q vbique valorem negatiuum. Ex quo erit $y = 0$ ſi fuerit $b = -2cf\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2 q\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$.

Coroll. 3.

731. At u obtinebit maximum valorem ſi ipſi q is tribuatur valor vt fiat $0 = \int\frac{p^3(c^2(1+p^2)-3q^2(ap-rp+s)^2)(ap-rp+s)^2 dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^3}$ integratione debito modo abſoluta; ſcilicet vt euaneſcat facto $r = 0$, tumque ponatur $r = a$.

Exemplum.

732. Sit ſectio diametralis ACD triangulum ad C rectangulum, ſeu ASD linea recta, erit $s = \frac{cr}{a}$, et $p = \frac{c}{a}$, atque $1 + pp = \frac{aa+cc}{aa}$, itemque $ap - rp + s = c$; his ſubſtitutis erit $\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2 q\,dr}{(cc(1+pp)+q^2(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{acq\,dr}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2} = \frac{a^2cq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$; atque $\int\frac{p^3(c^2(1+p^2)+3q^2(ap-rp+s)^2)dr}{(cc(1+pp)+qq(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)dr}{a(a^2+c^2+a^2q^2)^2} = \frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Quocirca pro curua BCD quae ſolidum producit quod pro maxima capacitate minimam patitur reſiſtentiam iſta obtinebitur aequatio $y = b + \frac{2a^2c^2fq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$ cui reſpondet $u = \frac{ccf(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Habebit ergo u maximum valorem ſi capiatur $q = \pm\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{3}}$. Si igitur maximus ipſius u valor ponatur $CD = c$, fiet $f = \frac{8(a^2+c^2)}{9c}$ deinde quia hoc caſu y euaneſcere debet fiet $b = \frac{ac}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$; ex quibus natura et figura curuae deſideratae facile cognoſcitur. Simul autem intelligitur hanc curuam fore algebraicam.

$= \frac{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}{(u-tq)^2}$. Ad valorem iam ipſius $\frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2}$ inveniendum, notari debet, dum dy conſideratur, dx tanquam conſtans tractari debere; facto autem $dx = 0$ fit $dr = \frac{-rdt}{t}$, adeoque $dy = \frac{-rudt}{bt} + \frac{rqdt}{b} = \frac{-rdt(u-tq)}{bt}$; atque dum dx conſideratur, dy conſtans eſt ponendum ſeu $dt = \frac{-udr}{rq}$ vnde fit $dx = \frac{+udr}{bq} - \frac{tdr}{b} = \frac{dr(u-tq)}{bq}$. Sed cum hinc non pateat quomodo variabiles r et t a ſe inuicem diſcerni debeant, oportebit loco alterutrius elementorum dx et dy inducere tertium elementum dz, cum id in aſſumtis quantitatibus variabilibus ipſum contineatur. Eſt autem $dxdy = \frac{dzdx}{Q} = \frac{dzdy}{P}$; nam dum x tanquam conſtans conſideratur loco dy ſcribi poteſt $\frac{dz}{Q}$, et dum y conſtans aſſumitur loco dx ſcribere licet $\frac{dz}{P}$ ex quibus hanc nanciſcimur formulam $\frac{p^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$, quae bis integrari debet, altera integratione ponendo z altera y conſtans. At eſt $dz = pdr$, et ſi z conſtans ponitur fit $dy = \frac{rqdt}{b}$; quamobrem fiet formula generalis $\frac{P^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$ pro noſtro caſu $= \frac{bp^2q^2rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$, quae bis integrari debet altera vice ponendo r, altera t conſtans. Ac primo quidem vtraque integratio ita eſt inſtituenda vt integrale euaneſcat, poſito vel r vel t, prout vel r vel t pro variabili eſt ſumta $= 0$, tumque faciendum eſt vel $r = b$ vel $t = a$. His igitur de modo integrationum praemonitis ſi altitudo celeritati, qua corpus progreditur debita ponatur $= v$, erit reſiſtentiae vis horizontalis repellens corpus ſecundum directionem AC $= 2bv \iint \frac{p^2q^2rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Deinde vis verticalis ex reſiſtentia orta, quae eſt $\iint \frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2} = 2v \iint \frac{Pdzdy}{1+P^2+Q^2}$ fiet pro noſtro caſu $= 2v \iint \frac{p^2q^2rdrdt(u-tq)}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$, quae applicata erit in

puncto

punĉto O axis AC, cuius diſtantia a punĉto A reperietur ſi diuidatur $\iint \frac{(ab(u-tq)-rz(u-tq)+b^2pqz)p^2q^2rdrdt}{b(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$, praeſcripto modo euolutum per $\iint \frac{(u-tq)p^2q^2rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Hisque cognitis totius reſiſtentiae effectus cognoſcetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

734. Figura ſectionis diametralis AFD hinc facillime ex curua CBD definitur. Nam quoniam eſt BC:HI = AC:FI applicatae FI et HI eidem abſciſſae CI reſpondentes datam inter ſe tenent rationem; ex quo curua AFD affinis erit curuae BHD

Coroll. 2.

735. Hancobrem problema, quo loco curuae BHD data fuiſſet curua AFD, ſectiones vero omnes horizontales inter ſe ſint ſimiles, vt in praeſente quaeſtione, ſimili modo reſoluetur, atque adeo ſolutio ab hac non differet niſi ſcribendo *a* loco *b* ſiquidem *r* et *z* denotent coordinatas curuae DFH

Coroll. 3.

736. Cum ſoliditas in genere ſit $= -2\iint Q\,y\,dx\,dy$ $= -2\iint Q\,dx\,dz$ poſito $\frac{dx\,dz}{Q}$ loco $dx\,dy$; fiet pro noſtro caſu ſoliditas $= \frac{2}{bb}\iint pr^2u\,dr\,dt = \frac{2}{bb}\int pr^2\,dr \int u\,dt$. Cum igitur $\int u\,dt$ exprimat aream ACB, dicatur ea $= ff$, erit ſoliditas $= \frac{2ff}{bb}\int pr^2\,dr = \frac{2ff}{bb}\int r^2\,dz$ poſito $r = b$ poſt integrationem ita abſolutam vt prodeat o, ſi fiat $r = o$.

Coroll.

Digitized by Google

Coroll. 4.

737. Superficies autem ABD*b* in aquam incurrens generaliter eſt $2\iint dx\,dy\,\sqrt{(1+P^2+Q^2)} = 2\iint \frac{dx\,dz}{Q} \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. quamobrem noſtro caſu haec ſuperficies exprimetur hac forma $2\iint \frac{r\,dr\,dt}{bb} \sqrt{(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$.

Coroll. 5.

738. Colligere etiam licet, quoties curuae CBD et CAD fuerint affines, toties corporis omnes ſectiones horizontales eſſe inter ſe ſimiles. Cum igitur ſectiones verticales ſectioni CBD parallelae ſimiles ſint, quando curvae CBA et CDA fuerint affines; intelligitur ſi tres curvae CBD, CAD et CAB fuerint inter ſe affines, tum omnes ſectiones vnicuique illarum ſectionum parallelas inter ſe ſimiles fore.

Scholion.

739. Quo appareat, quomodo formulae differentiales ſupra datae in quibus $dxdy$ ineſt, ad alias reduci queant in quibus vel $dxdz$ vel $dydz$ inſit, notandum eſt $dxdy$ ideo eſſe in illas formulas ingreſſum, quod inerat in elemento ſuperficiei $dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Quoniam autem hoc elementum natum eſt ex aequatione canonica $dz = Pdx + Qdy$ ſimili modo ex iſta aequatione canonica $dy = \frac{dz}{Q} - \frac{Pdx}{Q}$ naſcetur hoc ſuperficiei elementum $\frac{dxdz}{Q}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$, atque ex hac aequatione $dx = \frac{dz}{P} - \frac{Qdy}{P}$ Prodit elementum ſuperficiei iſtud $\frac{dydz}{P}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Cum igitur haec tria elementa bis integrata praebeant totam ſuperficiem, manifeſtum eſt ea ſibi mutuo ſubſtitui poſſe. Hancobrem

Digitized by Google

obrem formulae pro reſiſtentia ſupra inuentae in alias formas aequiualentes reduci poſſunt, quibus illarum loco vti licebit. Ita reſiſtentiae vis horizontalis quae ſupra inuenta erat $= 2v\iint\frac{P^3 dydx}{1+P^2+Q^2}$ quoque hoc modo $2v\iint\frac{P^2 dydz}{1+P^2+Q^2}$ ſiue hoc modo $2v\iint\frac{P^3 dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$ exprimi poterit. Simili modo vis reſiſtentiae verticalis tribus hiſce diuerſis modis exprimi poteſt; erit ſcilicet vel $2v\iint\frac{P^2 dxdy}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v\iint\frac{P dydz}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v\iint\frac{P^2 dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$; ex quibus formulis quouis caſu oblato iis vti conueniet, quae pro ratione quantitatum variabilium ita ſunt comparatae, vt alterutra variabilium in formula contentarum ab vnica variabilium aſſumtitiarum pendeat. Ita in hoc caſu opus erat eiusmodi formulis vti in quibus ineſſet dz, quia z inter ipſas variabiles aſſumtas reperiebatur.

Exemplum.

740. Sint omnes ſectiones horizontales HFb ſemicirculi, ſeu ſolidum genitum ex rotatione figurae CBD circa axem CD, erit figura CBA quadrans circuli et propterea $b = a$, atque ex circuli natura $u = \sqrt{(a^2-t^2)}$ et $q = \frac{-t}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $u - tq = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$, et $1+qq = \frac{a^2}{a^2-t^2}$; His ſubſtitutis erit reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC motum retardans $= \frac{-v}{a^3}\iint\frac{p^3t^3 rdrdt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{-v}{a^3}\int\frac{t^3dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}}\int\frac{p^3 rdr}{1+pp}$ vbi variabiles t et r a ſe inuicem ſunt ſeparatae. Signum quidem haec formula haberet negatiuum, ſed eius loco $+$ tuto ſubſtituitur cum transformatio formularum generalis pendeat a ſigno radicali, in quod vtrumque ſignum aequaliter competit. At eſt $\int\frac{t^3dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2}{3}a^3$ poſito

poſt

poſt integrationem $t = a$, vnde vis reſiſtentiae horizontalis eſt $= \frac{4}{3} v \int \frac{p^3 r dr}{1+pp}$. Simili modo erit vis reſiſtentiae verticalis $= \frac{2v}{a^2} \iint \frac{p^2 t^2 r dr dt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2v}{a^2} \int \frac{tt dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} \int \frac{p^2 r dr}{1+pp} = \frac{\pi v}{2} \int \frac{p^2 dr}{1+pp}$, quia eſt $\int \frac{tt dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{\pi}{4}$. De loco autem applicationis $\underline{o}$, quia formula minus fit ſimplex non erimus ſolliciti.

Coroll. 1.

741. Si idem hoc ſolidum inuertatur vt BDb fiat ſectio aquae et BAb ſectio ampliſſima, atque hoc ſolidum in directione CD celeritate altitudini $\underline{v}$ debita promoueatur tum reſiſtentia motum retardans erit $= \pi v \int \frac{rdr}{1+p^2}$. Hoc enim caſu omnes ſectiones verticales axi CD normales erunt ſemicirculi.

Coroll. 2.

742. Reſiſtentia ergo huius corporis, ſi mouetur ſecundum directionem CA ſe habebit ad reſiſtentiam eiusdem corporis moti in directione CD vt $\frac{4}{3} \int \frac{p^3 r dr}{1+pp}$ ad $\pi \int \frac{rdr}{1+pp}$.

Coroll. 3.

748. Si ergo figura BDb abeat in triangulum iſoſceles, ſeu corpus in ſemiconum rectum axis CD atque ponatur $CD = c$ exiſtente $BC = AC = a$. erit $z = c - \frac{cr}{a}$ et $o = - \frac{c}{a}$ Reſiſtentia ergo quam hic conus in directione CA motus patietur erit $= - \frac{4v}{3a} \int \frac{c^3 r dr}{a^2+c^2} = \frac{2ac^3 v}{3(a^2+c^2)}$; neglecto ſigno vt iam notaui.

Coroll. 4.

744. Reſiſtentia autem, quam idem ſemiconus in directione axis CD motus ſufferet, erit $= \pi v \int \frac{a^2 r dr}{a^2+c^2} = \frac{\pi c^4 v}{2(a^2+c^2)}$.

$\frac{\pi a^4 v}{2(a^2+c^2)}$. Quare haec reſiſtentia ſe habet ad priorem vt $\frac{\pi a^3}{2}$ ad $\frac{2c^3}{13}$. Vnde hae duae reſiſtentiae inter ſe erunt aequales ſi fuerit $c^3 = \frac{3\pi a^3}{4}$. ſeu $\frac{c}{a} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$. ſiue ſi ſit CD : CB $= \sqrt[3]{6\pi} : 2 = 2,661341 : 2$ vnde fit proxime CD : CB $= 4 : 3$.

Coroll. 5.

745. Si ponatur ſectio BD*b* etiam ſemicirculus, ita vt corpus fiat quadrans ſphaerae, vtraque reſiſtentia debebit eſſe eadem. Oritur autem ob $z = \sqrt{(a^2-r^2)}$ et $p = \frac{-r}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ reſiſtentia pro motu ſecundum CA $= \frac{4}{3} v \int \frac{r^4 dr}{a^2 \sqrt{(a^2-r^2)}} = \frac{2\pi a^2 v}{4\cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\pi a^2 v}{4}$. Pro motu autem ſecundum directionem CD erit reſiſtentia $= \pi v \int \frac{r dr (a^2-r^2)}{a^2} = \frac{\pi a^2 v}{4}$.

Scholion.

746. Abſoluimus igitur his propoſitionibus omnes caſus quibus corporis ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales eaeque vel ſectioni diametrali vel ampliſſimae parallelae ſunt ſimiles inter ſe. Atque ad huiusmodi corpora determinanda opus fuit trium ſectionum principalium ſcilicet ſectionis aquae, ſectionis ampliſſimae atque ſectionis diametralis duas tanquam datas aſſumere, quia ex hac conditione tertia ſectio ſponte determinatur. Dantur autem praeter has corporum ſpecies, quae ſectiones quasdam inter ſe parallelas ſimiles habent, innumerabiles aliae corporum ſpecies, quibus euoluendis nec locus nec tempus ſuppeteret. Harum vero primarias aliquas ſpecies examini ſubiicere, iuuabit, quae ad nauium figuras prope accedant.

Digitized by Google

cedant. Eiusmodi ſcilicet ſpecies contemplabimur, in quibus ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales ſint affines, cuius vocis ſignificationem hic in multo latiore ſenſu accipimus quam vocem ſimilitudinis. Figuras enim affines vocamus, in quibus ſumtis abſciſſis in data ratione, applicatae reſpondentes quoque conſtantem teneant rationem, ex qua definitione intelligitur figuras ſimiles ſub affinibus tanquam ſpeciem contineri, figurae enim affines euadunt ſimiles, ſi applicatae eandem rationem teneant, quam abſciſſae; affines autem et non ſimiles prodeunt figurae, ſi rationes abſciſſarum et applicatarum fuerint inaequales. Sic omnes ellipſes inter ſe ſunt figurae affines, quoniam abſciſſis in ratione axium transuerſorum aſſumtis reſpondent applicatae rationem axium coniugatorum tenentes ſi quidem abſciſſae in axibus transuerſis capiantur. Similiquoque modo omnia triangula rectangula figurae ſunt inter ſe affines. Data igitur curua quacunque datam baſin datamque altitudinem habente, facile erit aliam ipſi affinem deſcribere, quae baſin quamcunque et altitudinem quamcumque praeſcriptam habeat. Nam ſi datae curuae baſis ſit $= a$ et altitudo $= b$, abſciſſaque quaecunque in baſi accepta vocetur x, eique reſpondens applicata altitudini parallela ſit y, hoc modo ſuper baſi alia A ad aliam altitudinem B conſtruetur curua affinis, in baſi A ſumatur abſciſſa $= \frac{Ax}{a}$, atque reſpondens applicata $= \frac{By}{b}$, eritque curva hoc modo deſcripta priori affinis. His igitur notatis non difficile erit ſequentia problemata aggredi.

PROPOSITIO 71.
Problema.

Tab. XXXI. fig. 2. 747. *Sint omnes tres principales ſectiones datae, ſcilicet ſectio aquae* ACB *ſectio ampliſſima* BCD *atque ſectio diametralis* ACD; *ſolidum vero ita ſit comparatum, vt omnes ſectiones* STP *ſectioni ampliſſimae* BDC *parallelae eidem ſint affines, hocque corpus in aqua moueatur ſecundum directionem* CAL: *determinare reſiſtentiam, quam patietur.*

Solutio.

Cum primum ſectio diametralis ATD data ſit, ponatur pro ea abſciſſa $CP = r$, et applicata $PT = s$, dabiturque relatio inter r et s ſitque $ds = p\,dr$. Secundo ob curuam CBA ſeu ſectionem aquae datam, ponatur pro ea abſciſſa $CP = t$, et applicata $PS = u$, ſitque $du = q\,dt$. Tertio pro ſectione ampliſſima CBD ſit abſciſſa $CG = \tau$ et applicata $GH = \upsilon$, atque $d\upsilon = \varrho\,d\tau$. His pro curuis datis poſitis concipiatur ſectio quaecunque SPT ſectioni BCD parallela, quae ex natura ſolidi affinis erit ipſi ſectioni BCD; atque ad ſolidi indolem exprimendam accipiantur hae tres variabiles $AP = x$, $PM = y$ et $MQ = z$ eritque prioribus notationibus ad hunc caſum accommodatis $t = r$, atque $x = a - r$ poſita longitudine $AC = a$. Iam cum ſectionis SPT baſis ſit $PS = u$ et altitudo $PT = s$; ſectionis vero BCD ponatur baſis $BC = b$ et altitudo $CD = c$; hinc ob affinitatem ſi ſit PM, $y = \frac{u\tau}{b}$ erit MQ, $z = \frac{s\upsilon}{c}$. Nunc ob $x = a - r$ erit $dr = -dx$; atque $dy = \frac{u\,d\tau + \tau q\,dr}{b}$ propter $t = r$ et $dz = \frac{s\varrho\,d\tau + \upsilon p\,dr}{c}$. Cum igi-

igitur ſit $d\tau = \frac{b\,dy}{u} + \frac{\tau q\,dx}{u}$ ob $dr = -dx$ fiet $dz = \frac{(s\tau q\rho - u\cdot p)dx}{cu} + \frac{bs\rho\,dy}{cu}$, quae aequatio cum generali ſupra aſſumta $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata dat $P = \frac{s\tau q\rho - u\cdot p}{cu}$ et $Q = \frac{bs\rho}{cu}$, vnde fit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\cdot p)^2}{c^2u^2}$. Accedamus nunc ad formulas $\frac{P^3dxdy}{1+P^2+Q^2}$, $\frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2}$ et $\frac{P^2(x+Pz)dxdy}{1+P^2+Q^2}$ pro viribus reſiſtentiae et directione determinandis inuentas, quae duplicem integrationem requirunt, alteram in qua x alteram in qua y ponatur conſtans. Cum igitur ſit $dx = -dr$, atque poſito x conſtante fiat $dy = \frac{ud\tau}{b}$; hi valores ſubſtituantur loco dx et dy, vt fiat $dxdy = -\frac{udrd\tau}{b}$; ac ſi in illis formulis integratio inſtituatur poſito r conſtante, ſimul conſtantes erunt quantitates ab r pendentes velut s, t, u, p, q. in altera vero integratione in qua τ ponitur conſtans, conſtantes inſuper erunt υ et ρ. Integratio autem in qua r ponitur conſtans ita abſoluatur vt integrale euaneſcat poſito $\tau = 0$, tumque ponatur $\tau = b$ ſeu $\upsilon = 0$. ſimili modo altera integratio in qua τ conſtans ponitur eſt abſoluenda, vt integrale euaneſcat poſito $r = 0$, hocque facto ponatur $r = a$. Perinde autem eſt a quanam integratione incipiatur, cum variabiles r et τ, reliquaeque, quae per has duas dantur, a ſe inuicem non pendeant. His igitur praemiſſis obtinebitur reſiſtentiae vis horizontalis motui contraria et ſecundum directionem AC vrgens $= \frac{-2v}{bc}\iint\frac{(s\tau q\rho - u\cdot p)^3 dr d\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\cdot p)^2}$. vis vero reſiſtentiae verticalis, qua corpus ſurſum vrgetur erit $= \frac{-2v}{b}\iint\frac{(s\tau q\rho - u\cdot p)^2 u dr d\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\cdot p)^2}$. Punctum autem O, in quo haec vis applicata eſt concipienda reperietur diuidendo hanc expreſ-

expreſſionem $\iint \frac{P^2(x+Pz)u\,dr\,d\tau}{1+P^2+Q^2}$ per iſtam $\iint \frac{P^2 u\,dr\,d\tau}{1+P^2+Q^2}$, quotus enim dabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. 1.

748. Cum ſoliditas ingenere ſit $= -2\iint Q y\,dx\,dy$ pro noſtro caſu autem ſit $-dx\,dy = \frac{u\,dr\,d\tau}{b}$, $y = \frac{ur}{b}$ et $Q = \frac{bsp}{cu}$; erit noſtri ſolidi capacitas $= \frac{2}{bc}\iint u s \tau \varrho\,dr\,d\tau = \frac{2}{bc}\int u s\,dr \int \tau \varrho\,d\tau$. Eſt vero $\int \tau \varrho\,d\tau = \int \tau\,d\vartheta = -$ area BCD haec ergo area ſi dicatur ff erit ſoliditas $= \frac{-2ff}{bc}\int u s\,dr$.

Coroll. 2.

749. Si ſectio diametralis ACD affinis ſit ſectioni aquae, tum omnes ſectiones ipſi BCD parallelae ſimul erunt ſimiles. Tum autem fit $s:u = c:b$ atque $u = \frac{bs}{c}$ et $q = \frac{bq}{c}$, quibus valoribus ſubſtitutis prodeunt ſupra inventae expreſſiones pro ſectionibus ſimilibus.

Coroll. 3.

750. Si linea DTA abeat in rectam horizontalem fiet $s = c$ et $p = 0$, hinc reſiſtentiae vis horizontalis fiet $= \frac{-2v}{b}\iint \frac{\tau^3 q^3 \rho^3\,dr\,d\tau}{u^2+b^2\rho^2+\tau^2 q^2 \rho^2}$. Atque ſi area ACB ponatur $= gg$, exiſtente area BCD$=ff$ erit ſoliditas huius corporis $= \frac{2ffgg}{b}$.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XXX. fig. 2. 751. *Sint iterum datae tres ſectiones principales* ACB, ACD et BCD, *atque omnes ſectiones* FGH *ſectioni di-*

diametrali ACD *parallelae eidem ſectioni ſint affines: hocque corpus moueatur in aqua ſecundum directionem* CAL; *determinare reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

Sit iterum vt ante pro ſectione diametrali ACD abſciſſa $CR = r$ et applicata $RS = s$ atque $ds = pdr$. Deinde pro ſectione aquae CBA ſit abſciſſa in AC ſumta ipſique GF aequalis $= t$ et ei applicata reſpondens, quae aequalis erit CG ſit u atque $du = qdt$. Pro tertia denique ſectione BCD ſit abſciſſa $CG = \tau$ et applicata $GH = \upsilon$ exiſtente $d\upsilon = \varrho d\tau$. Si nunc concipiatur ſectio verticalis FGH parallela ſectioni diametrali ACB fiet $u = \tau$, et $d\tau = qdt$, vnde τ, q, u, υ et ϱ functiones erunt ipſius t ab eoque pendebunt, eritque $d\upsilon = q\varrho dt$. Poſitis ergo $AC = a$, $BC = b$ et $CD = c$, quoniam figura FGH affinis eſt figurae ACD ſumatur in ea abſciſſa $GM = \frac{tr}{a}$ eritque applicata $MQ = \frac{\upsilon s}{c}$. Quamobrem ſi vocentur $AP = x$, $PM = y$ at $MQ = z$; erit $x = a - \frac{tr}{a}$, $y = \tau = u$; et $z = \frac{\upsilon s}{c}$. Cum igitur ſit $dy = qdt$, ſeu $dt = \frac{dy}{q}$, erit $dx = \frac{-rdy}{aq} - \frac{tdr}{a}$ et $dz = \frac{\upsilon pdr}{c} + \frac{sq\varrho dt}{c} = \frac{\upsilon pdr}{c} + \frac{s\varrho dy}{c}$, unde fit $dz = \frac{-a\upsilon pdx}{ct} + \frac{(ts\varrho - r\upsilon p)dy}{ctq}$; quae cum generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$ comparata dat $P = \frac{-a\upsilon p}{ct}$ et $Q = \frac{tsq\varrho - r\upsilon p}{ctq}$ atque $1 + P^2 + Q^2 = \frac{c^2t^2q^2 + a^2\upsilon^2p^2q^2 + (tsq\varrho - r\upsilon p)^2}{c^2t^2q^2}$. Quod autem ad formulas differentiales attinet in quibus eſt $dxdy$ atque x et y a ſe inuicem non pendere, ponuntur; cum ſit $dy = qdt$, ideoque y a ſolo t pendet erit $dx = \frac{-tdr}{a}$; ob $dy = 0$, quando de dx eſt quaeſtio. Erit ergo

go $dxdy = \frac{-tqdrdt}{a}$, atque reſiſtentiae vis horizontalis ſecundum directionem AC ſollicitans erit $= \frac{2a^2v}{c}\iint\frac{\vartheta^3p^3q^3drdt}{c^2t^2q^2+a^2\vartheta^2p^2q^2+(tsq\varrho-r\vartheta p)^2}$ vbi duplici integratione opus eſt, altera in qua ponitur t conſtans, cum eoque u, ϑ, q et ϱ in altera vero ponitur r conſtans cum ſuis ſunctionibus s et p. Simili vero modo erit vis reſiſtentiae verticalis $= -2av\iint\frac{\vartheta^2p^2q^3drdt}{c^2t^3q^2+a^2\vartheta^2tp^2q^2+t(tsp\varrho-r\vartheta p)^2}$ cuius locus applicationis erit punctum O, eiusque interuallum A O erit quotus qui reſultat ex diuiſione huius quantitatis $\iint\frac{P^2(x+Pz)tqdrdt}{1+P^2+Q^2}$ per hanc $\iint\frac{P^2tqdrdt}{1+P^2+Q^2}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

752. Soliditas huius corporis reperietur ex formula generali $-2\iint Qydxdy$, quae pro noſtro caſu tranſit in hanc $\frac{2}{ac}\iint(tsuq\varrho drdt - ru\vartheta pdrdt)$ quae primo integrata poſito t conſtanti, dat $\frac{2ff}{ac}\int(tuq\varrho + u\vartheta)dt = \frac{2ff}{ac}\int t\vartheta du$ ob $q\varrho dt = d\vartheta$; denotante ff aream ACD.

Coroll. 2.

753. Si curuae CBA et CBD fuerint affines hoc eſt GF : GH $= a : c$, ita vt ſit $\vartheta = \frac{ct}{a}$ et $q\varrho = \frac{c}{a}$, omnes ſectiones FGH fierent inter ſe ſimiles, atque reſiſtentia corporis horizontalis erit $= 2av\int\frac{tp^3q^2drdt}{a^2q^2(1+p^2)+(s-rp)^2}$ vti iam ex ſuperioribus conſtat.

Coroll. 3

754. Si curua BD abeat in rectam ipſi BC parallelam, ita vt ſectio ampliſſima BDb fiat rectangulum, erit $\vartheta = c$ et $\varrho = 0$; huiusmodi ſolidi ergo reſiſtentia horizontalis ſeu motum retardans eſt $= 2a^2v\iint\frac{p^3q^3drdt}{a^2p^2q^2+r^2p^2+t^2q^2}$.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 4.

755. Quoniam in hac expreſſione p et q, itemque r et t aequaliter inſunt, intelligitur ſectiones ACB et ACD eadem manente reſiſtentia inter ſe commutari poſſe. Si quidem ſectio ampliſſima fuerit parallelogrammum rectangulum.

Coroll. 5.

756. Si inſuper ſectiones ACB et ACD fiant triangula rectangula, quo caſu ſolidum abit in piramidem, curuilineam cuius baſis erit rectangulum, vertex vero A. Cum igitur hoc caſu ſit $u = b - \frac{bt}{a}$ hincque $q = -\frac{b}{a}$; et $s = c - \frac{cr}{a}$ hincque $p = -\frac{c}{a}$ erit reſiſtentia huius corporis $= \frac{2b^3c^3v}{a^2}\iint \frac{drdt}{b^2c^2 + b^2t^2 + c^2r^2} = \frac{2b^2c^2v}{a^2}\int \frac{dr}{\sqrt{(b^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}}$.

PROPOSITIO 73.

Problema.

757. *Datae ſint denuo tres ſectiones principales* ACB, *Tab. XXXI. fig. 1.* ACD *et* BCD, *atque corpus* ABDb *ita ſit comparatum, vt omnes ſectiones horizontales* FHI *ſint inter ſe affines: moueaturque hoc corpus ſecundum directionem* AC *in aqua: determinare reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

Sit primo pro ſectione diametrali ACD abſciſſa in axe CA aſſumta ipſique IF aequalis $= r$ eique reſpondens applicata quae erit $= CI = GH = s$, ſitque $ds = pdr$. Tum pro ſectione aquae CBA ſit abſciſſa $CT = t$ et applicata $TV = u$ ſitque $du = qdt$. Tertio pro ſectione

ampliſſima ſit abſciſſa CG $= \tau$ et applicata GH $= \vartheta$ exiſtente $d\vartheta = \varrho\, d\tau$. Si nunc concipiatur ſectio horizontalis quaecunque FIH, ſuperiores denominationes ad eam applicatae praebebunt $\vartheta = s$ indeque $p\,dr = \varrho\, d\tau$. Quoniam autem ſectio FIH affinis eſt ſectioni ACB, ſi ponatur AC $= a$ BC $= b$ et CD $= c$, ſumaturque IK $= \frac{\tau t}{a}$ erit reſpondens applicata KQ $= \frac{\tau u}{b}$. Si nunc ponatur AP $= x$, PM $= y$ et MQ $= z$ erit $x = a - \frac{\tau t}{a}$, $y = \frac{\tau u}{b}$ et $z = \vartheta = s$: vnde fit $dz = p\,dr$; $dy = \frac{\tau q\,dt}{b} + \frac{up\,dr}{b\varrho}$, ob $d\tau = \frac{p\,dr}{\varrho}$, et $dx = \frac{-\tau\,dt}{a} - \frac{t\,dr}{a}$; ex quibus ſequens aequatio inter x, y et z conficitur $dz = \frac{bpr\varrho\,dy + a\tau pq\varrho\,dx}{urp - t\tau q\varrho}$ quae cum generali aequatione ſupra aſſumta comparata dat $P = \frac{a\tau pq\varrho}{urp - t\tau q\varrho}$ et $Q = \frac{brp\varrho}{urp - t\tau q\varrho}$ ita vt ſit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{p^2\varrho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\varrho)^2}{(urp - t\tau q\varrho)^2}$ Iam quoniam z per vnicam conſtitutarum variabilium determinatur, eiusmodi formulas ad reſiſtentiam inueniendam aſſumere conuenit in quibus ſit dz. Cum enim ſit $dz = p\,dr$, et poſito z ſeu r conſtante fiat $dy = \frac{\tau q\,dt}{b}$, erit $dz\,dy = \frac{\tau pq\,dr\,dt}{b}$, in qua duae variabiles a ſe inuicem non pendentes inſunt, altera r et quantitates per eam datae s, p, ϑ, τ et ϱ, altera vero t, cum u et q, quae in integrationibus probe a ſe inuicem ſunt ſecernendae, ita dum alterae variabiles ponuntur, alterae tanquam conſtantes tractentur. Cum iam vis reſiſtentiae horizontalis ſeu ſecundum directionem AC vrgens ſit $= 2v \iint \frac{P^2\,dz\,dy}{1 + P^2 + Q^2}$, fiet haec reſiſtentia pro noſtro caſu $= \frac{2a^2v}{b} \iint \frac{\tau^3p^3q^3\varrho^2\,dr\,dt}{p^2\varrho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\varrho)^2}$ quae vti iam ſaepius eſt praeceptum, debito modo bis debet integrari. At reſiſtentiae vis verticalis fit $= \frac{2av}{b} \iint \frac{\tau^2p^2q^2\varrho\,dr\,dt\,(urp - t\tau q\varrho)}{p^2\varrho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\varrho)^2}$, locus autem ſeu punctum O vbi

vbi haec vis applicata eſt concipienda, reperietur eo modo, quem generaliter dedimus, ſcilicet interuallum AO eſt quotus, qui reſultat ſi $\iint \frac{P(x+Pz)\tau pq\,dr\,dt}{1+P^2+Q^2}$ diuidatur per $\iint \frac{P\tau pq\,dr\,dt}{1+P^2+Q^2}$, integrationibus vtrisque legitimo modo abſolutis. Q. E. I.

Coroll. 1.

758. Ad ſoliditatem huius ſolidi inueniendam conſiderari oportet hanc expreſſionem $-2\iint y\,dx\,dz$; pro qua applicanda quoniam eſt $dz = pdr$ et poſito z conſtante $dx = \frac{-r\,dt}{a}$ atque $y = \frac{\tau u}{b}$ fiet ſoliditas $= \frac{2}{ab}\iint \tau\,u\,r\,p\,dr\,dt = \frac{2}{ab}\int u\,dt.\int \tau\,r\,p\,dt.$

Coroll. 2.

759. Quoniam vero $\int u\,dt$ integratum dat aream ACB, quae ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{2ff}{ab}\int \tau\,p\,r\,dr = \frac{2ff}{ab}\int \tau\,r\,ds$ ob $pdr = ds$ ſeu eſt $= \frac{2ff}{ab}\int \tau\,r\,d\vartheta$ ob $d\vartheta = ds$, quae integratio ab vtriusque curuae CDA et CDB natura pendet.

Coroll. 3.

760. Si fiat linea AFD recta verticalis erit $r = a$ et $p = \infty$, vnde reſiſtentia horizontalis, poſtquam in formula inuenta poſitum erit $\varrho\,d\tau$ loco pdr, prodit $= \frac{2v}{b}\iint \frac{\tau^3 q^3 \varrho\,dt\,d\tau}{b^2+u^2+\tau^2 q^2}$.

Scholion

761. Hisce ſatis prolixe reſiſtentiam, quam corpora plano diametrali praedita in aqua directe promota patiuntur, ſumus proſecuti; vix enim figura, quae quidem ad naues eſſet idonea concipi poterit, quae non in per-

tractatis corporum ſpeciebus continеatur. Ordo igitur requireret vt etiam, vti in figuris planis fecimus ad motum obliquum conſiderandum progrederemur, ſed cum in figuris planis haec tractatio tam difficilis extitiſſet, multo maiori difficultati, quando de corporibus quaeſtio agitatur, haec inquiſitio foret obnoxia, et praeterea ſi quid de directione vis reſiſtentiae per prolixiſſimos calculos erueretur, tamen parum vtilitatis inde ad nauium perfectionem conſequeremur. Quamobrem his cauſis impediti iſti capiti finem imponere cogimur, id quod ſine notabili in ſequentibus incommodo facere poſſumus, cum ea quae de figuris planis ſi motu obliquo promoueantur, ſunt prolata, ſatis prope media directio reſiſtentiae et centrum reſiſtentiae aeſtimari queat.

Caput

Digitized by Google

Caput Septimum
DE

MOTV PROGRESSIVO CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

PROPOSITIO 74.
Problema.

762. *Si corpus quodcunque plano diametrali verticali praeditum in aqua quieſcente moueatur curſu directo, determinare eius motus quo moueri coepit, diminutionem a reſiſtentia aquae ortam, atque celeritatem in ſingulis locis viae, quam deſcribet.* Tab. XXXII. fig. 1.

Solutio.

Quoniam corpus plano diametrali verticali praeditum ponitur, eius partis ſubmerſae, quippe quae per illud planum diametrale in duas partes ſimiles et aequales diuiditur, centrum magnitudinis in ipſo hoc plano ſitum erit ex quo etiam centrum grauitatis totius corporis in hoc plano collocatum eſſe oportet. Quia vero porro hoc corpus curſum directum tenere ponitur, ita vt moueatur ſecundum directionem horizontalem in ipſo plano diametrali poſitam, media directio reſiſtentiae in hoc ipſum planum cadet. Vis reſiſtentiae horizontalis igitur directioni motus erit directe contraria, et hancobrem ſolum motum retardabit, directionem motus vero non afficiet. Vis reſiſtentiae vero verticalis ſi quae adeſt neque motum corporis

poris neque eius directionem turbabit, ſed in corpore alleuando tantum conſumetur. Deinde niſi reſiſtentiae media directio per ipſum corporis centrum grauitatis tranſeat, corpus circa axem latitudinalem inclinabit, qua inclinatione neque motus directio neque poſitio ſpinae ſeu axis nauis a prora ad puppim ductus mutabitur. Quamobrem a reſiſtentia aquae motus aliter non turbabitur, niſi diminutione celeritatis; ac tam motus directio, quam curſus directus conſeruabitur. His notatis ſit AEBF ſectio corporis horizontalis per eius centrum grauitatis G facta, AB recta horizontalis in plano diametrali a prora A ad puppem B extenſa quae ſimul directionem motus repraeſentabit, atque recta CGL repraeſentabit viam in qua centrum grauitatis ingredietur, in qua ſimul tum prora A tum puppis B perpetuo ſitae manebunt. Ponamus nunc corpus egreſſum eſſe ex puncto C, vbi celeritatem initialem habuerit altitudini k debitam; dum vero corporis centrum grauitatis in G verſatur, ſit eius celeritas, qua in directione ſua GL moueri perget debita altitudini v. Sit porro maſſa ſeu pondus totius corporis $= M$, eius partis ſubmerſae volumen $= V$; reſiſtentiam vero hoc corpus motu directo in aqua progrediens tantam patiatur, quantam figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota pateretur; ex quo reſiſtentia, quam corpus, dum eius centrum grauitatis in G verſatur, patietur aequabitur ponderi voluminis aquae ffv, quod pondus ſe habebit ad pondus totius corporis M vt ffv ad V ita vt vis reſiſtentiae motum retardans futura ſit aequalis ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Sit nunc ſpatium $CG = s$, quod corpus ab initio motus

tus iam confecit, atque dum elementum $Gg = ds$ percurret tantum celeritatis decrementum vt ſit $-dv = \frac{ffvds}{V}$; quae aequatio integrata dat $l\frac{k}{v} = \frac{ffs}{V}$ integratione ita inſtituta vt fiat $v = k$, poſito $s = 0$, vti conditio quaeſtionis requirit. Erit ergo $\frac{k}{v} = e^{ffs:V}$ denotante e numerum, cuius logarithmus eſt $= 1$, hincque porro $v = ke^{-ffs:V}$, ex qua formula celeritas corporis in ſingulis punctis viae, quam deſcribit cognoſcitur. Denique cum ipſa celeritas ſit $= e^{-ffs:2V}\sqrt{k}$ erit tempuſculum, quo elementum Gg $= ds$ percurretur $= \frac{e^{ffs:2V}ds}{\sqrt{k}}$, indeque tempus totum, quod inſumſit ad ſpatium $CG = s$ abſoluendum, erit $= \frac{2V(e^{ffs:2V} - 1)}{ff\sqrt{k}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

763. Cum altitudo celeritati corporis in G debita ſit $= ke^{-ffs:V}$, intelligitur corpus omnem motum nunquam eſſe amiſſurum: celeritas enim non euaneſcit, niſi ponatur $s = \infty$ hoc eſt corpus actu ſpatium infinitum abſoluet antequam omnem perdat motum.

Coroll. 2.

764. Expreſſio celeritatis commode etiam in ſeriem poteſt transformari, per quam fiet $v = k - \frac{kffs}{V} + \frac{kf^4s^2}{2V^2} - \frac{kf^6s^3}{6V^3} + \frac{kf^8s^4}{24V^4} -$ etc. quae ſatis cito conuergit, niſi ſpatium s capiatur valde magnum.

Digitized by Google

Coroll. 3.

765. Deinde etiam perſpicitur decrementum celeritatis eo fore maius, dum corpus datum ſpatium s abſoluit, quo maior fuerit area ff, ad quam reſiſtentiam reduximus, et quo minor portio aquae fuerit ſubmerſa, hoc eſt quo leuius fuerit corpus.

Coroll. 4.

766. Si igitur plura corpora ſimilia eadem celeritate moueri incipiant, tenebit reſiſtentia ſeu area ff rationem ſubſesquiplicatam ponderum, partes ſubmerſae v vero ipſam rationem ponderum, vnde intelligitur corpora maiora minus retardari quam minora.

Coroll. 5.

767. Tempus etiam, quo corpus datum ſpatium $CG = s$ abſoluit, commode per ſeriem exprimitur, erit enim $= \frac{s}{\sqrt{k}} + \frac{f^2 s^2}{4V\sqrt{k}} + \frac{f^4 s^3}{24V^2\sqrt{k}} + \frac{f^6 s^4}{192V^3\sqrt{k}} +$ et. At ſi motu vniformi initiali progrederetur, nullam patiens reſiſtentiam, tum tempus per idem ſpatium s foret $= \frac{s}{\sqrt{k}}$; ex quo quanto maiori tempore propter reſiſtentiam opus ſit intelligitur.

Coroll. 6.

768. Si tempus, quo corpus datum ſpatium percurrit deſideretur in data temporis menſura, tum in expreſſione temporis $\frac{2V(e^{ffs:2V} - 1)}{ff\sqrt{k}}$ quantitates k, s, ff et V in partibus milleſimis pedis rhenani exprimantur; quo facto expreſſio per 250 diuiſa dabit tempus in minutis ſecundis.

Co-

Coroll. 7.

769. Simili modo ſi celeritas ipſa deſideretur expreſſa per ſpatium, quod dato tempore percurritur ea celeritate vniformiter: ponatur ſpatium quod vno minuto ſecundo, abſoluitur eſſe n partium milleſimarum pedis rhenani, eritque $\frac{n}{250\sqrt{v}} = 1$; dato v pariter in particulis milleſimis pedis rhenani; vnde fiet $n = 250\sqrt{v}$.

Coroll. 8.

770. Sin autem celeritas detur per ſpatium n vno minuto ſecundo percurſum, atque n datum ſit in partibus milleſimus pedis rhenani, inuenietur altitudo celeritati illi debita $v = \frac{n^2}{62500}$, pariter in partibus milleſimis eiusdem pedis: ex quibus facile erit hos duos celeritates menſurandi modos inter ſe comparare, alterumque ex altero formare.

Scholion 1.

771. Quod corpora aquae innatantia nunquam omnem motum omittant, ſed perpetuo moueri pergant, id quidem experientiae non eſt conſentaneum, qua ſatis conſtat, motum, tandem penitus ceſſare. Verum hic notari oportet, aquam praeter eam reſiſtentiam, quae quadrato celeritatis eſt proportionalis aliam inſuper reſiſtentiam opponere, a celeritate non pendentem, ſed ipſis momentis temporum proportionalem, prout Neutonus loquitur, ſeu quae ſit conſtans, atque altitudinem celeritati debitam diminuat in ratione ipſius elementi ſpatii percurſi. Haec autem reſiſtentia aquae tam eſt exigua, vt niſi motus ſit lentiſſimus, ea prae altera reſiſtentia euaneſcat; hancque ob cauſam in ſolutione huius problematis

iſtam reſiſtentiam neglevimus, cum inſtitutum noſtrum non ſit motus tardiſſimos ex profeſſo proſequi. Interim tamen iſta reſiſtentia calculum non reddit difficiliorem; ſit enim iſta reſiſtentia conſtans pro caſu oblato $= g$, ſeu ponderi g, aequiualens, prodibit loco aequationis $-dv = \frac{ffvds}{V}$ iſta $-dv = \frac{ffvds}{V} + \frac{gds}{M}$; quae integrata dat $v = (K + \frac{gV}{ffM}) e^{-ffs:V} - \frac{gV}{ffM}$. Ex hac igitur aequatione vtique intelligitur, corpus non vltra datum terminum eſſe progreſſurum, cum eius celeritas euaneſcat percurſo ſpatio s, cuius quantitas ex hac aequatione dabitur $e^{ffs:V} = \frac{kffM+gV}{gV}$ ſeu $s = \frac{V}{ff}(\frac{kffM+gV}{gV}$. Quin etiam ex iſta aequatione cognoſcetur ipſa haec reſiſtentia g, ex ſpatio percurſo, donec totus motus fuerit amiſſus, ſi enim hoc ſpatium per experientiam definitum ſit $= s$, erit $g = \frac{kffM}{V(e^{ffs:V} - 1)}$, quae vnico experimento definita, pro omnibus caſibus, quibus idem corpus curſu directo in aqua mouetur, valebit.

Scholion 2.

772. Initium fecimus huius capitis a motu ſeu curſu directo, atque inſuper rectilineo, motusque huius diminutionem a reſiſtentia ortam definiuimus. Ex iis autem circumſtantiis, quarum mentionem fecimus in ſolutione, ad curſum directum et rectilineum conſeruandum requiſitis, ſimul colligere licet quibus rebus iſte curſus turbetur. Primo ſcilicet motus rectilineus turbaretur, ſi directio media reſiſtentiae non in planum diametrale incideret, vel ſi vis horizontalis ex ea orta directioni motus non eſſet directe contraria; ex ſupra enim allatis ſatis patet ſi reſiſtentiae directio

Digitized by Google

directio non congruat cum directione motus, tum motum non ſolum retardari ſed etiam a ſemita rectilinea deflecti; quae quidem pertinent ad ſolum centri grauitatis motum progreſſiuum, quem hic imprimis conſideramus. Etiamſi autem motus non fieret in linea recta, tamen curſus manere poteſt directus, ſi ſcilicet perpetuo axis longitudinalis a prora ad puppem ductus maneat directioni motus parallelus; per curſum enim directum intelligimus eiusmodi nauium motum, cuius directio directe a puppi ad proram tendit, et in quo eadem nauis pars anterior reſiſtentiae aquae opponitur. Quando igitur eiusmodi vires adeſſent, quae nauem circa axem verticalem conuerterent, etiamſi illae motum progreſſiuum non afficerent, tamen curſum directum turbarent, et curſum obliquum producerent. Quare cum in caſu propoſito, nullae iſtius modi vires adſint, etiam motus non ſolum in linea recta fieri inuentus eſt, ſed etiam curſus manſit directus. Primum igitur conſtituimus curſus directos ſimulque rectilineos examini ſubiicere, tam in aqua quieſcenti quam fluuio, et id circo eiusmodi caſus proponere oportet, quibus tam curſus directus quam motus rectilineus conſeruetur; quibus caſibus euolutis facilius erit ad curſus obliquos motusque curuilineos examinandos progredi. Corpora autem ipſa aquae innatantia, prout ſint vel libera ſeu ſibi relicta, vel non libera ſeu termino cuipiam veluti anchorae alligata primariam huius capitis diuiſionem ſuppeditabunt. Deinde vero ſubdiuiſiones ſumentur a potentiis quibus corpora ſollicitantur, de quibus ſi affuerint, primo enim in quaque tractatione vt hic fecimus nullas potentias

 ſolli-

Digitized by Google

ſollicitantes conſideramus, diſpiciendum eſt, non ſolum quantae ſint et quamnam directionem teneant, ſed etiam quomodo pro varia corporum celeritate et directione immutentur. Si enim naues a vento propelluntur, vis venti fit eo minor quo celerius naues progrediuntur, quando quidem in eam plagam in quam ventus tendit, mouentur; in reliquis autem caſibus obliquitatis venti ratio eſt habenda. Deinde etiam velorum directio, a qua directio vis venti pendet, imprimis eſt contemplanda, quippe quae ſemel fixa eandem reſpectu nauis tenent poſitionem, vtcunque eius curſus immutetur. Remorum autem ratio aliter eſt comparata, cum eandem vim exerceant atque in eadem directione reſpectu nauis, quantumuis tam celeritas quam motus directio mutetur. Ad hanc igitur potentiarum diſtinctionem probe attendi oportebit, quando in earum effectus inquiremus; id quod etiam nunc non niſi generatim facere licet, cum ipſi effectus tam a vento quam remis oriundi nondum ſint penitus perſpecti; ſed in ſequenti demum libro accurate euoluentur. Quamobrem ſufficiet hoc argumentum ita generaliter pertractaſſe, vt eius vſus ad ſequentem librum ſatis pateat.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XXXII. fig 1.

773. *Si corpus plano diametrali praeditum in fluuio ita ſit collocatum, vt axis corporis a prora ad puppem ductus in fluuii directionem incidat, definire motum quem fluuii vis corpori imprimet.*

Solutio.

Repreſentetur corpus per ſectionem horizontalem A E B F per centrum grauitatis G factam, et ponatur corpus a fluuio iam propulſum eſſe in hunc ſitum, cum initio verſaretur eius centrum grauitatis in C, vbi corpus nullam adhuc habuit celeritatem. Manifeſtum igitur eſt ex conditionibus praeſcriptis corpus curſum directum atque rectilineum eſſe accepturum, cum nulla adſit vis, quae vel motum rectilineum deflectat, vel corpus circa axem verticalem conuertat, vt inde curſus obliquus oriri poſſet. Cum itaque corporis in C celeritas nulla fuiſſet, ponatur eius celeritas acquiſita cum in G peruenerit debita altitudini v ſpatium vero a centro grauitatis percurſum C G ſit $= S$. Porro fluuii celeritas debita ſit altitudini b. Dum ergo corpus verſatur in G vbi eius celeritas eſt $\sqrt{v}$ fluvius in corpus aget exceſſu ſuae celeritatis, qua eſt $\sqrt{b}$ ſupra celeritatem corporis $\sqrt{v}$, hoc eſt celeritate $\sqrt{b}-\sqrt{v}$ haecque celeritate eandem vim in corpus exeret, ac ſi corpus eadem celeritate in aqua quieſcente ſecundum directionem A B moueretur. Ponatur autem figura plana $= ff$, quae hoc caſu eandem reſiſtentiam pateretur ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ex his ergo ſequitur fore vim corpus ſecundum directionem G L propellentem aequalem ponderi aquae, cuius volumen ſit $= (\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ff$. Poſitis igitur maſſa ſeu pondere corporis $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V erit vis corpus in G propellens $= \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffM}{V}$; ab haecque vi ita motus corporis accelerabitur, vt dum per ſpatii elementum $Gg = ds$ progreditur, ſit $dv = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffds}{V}$ ſeu $\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2} = \frac{ffds}{V}$, cuius inte-

Digitized by Google

integrale eſt $\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} - 2l\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} = \frac{ffs}{V}$, integratione ita inſtituta vt fiat $v = 0$ poſito $s = 0$. Tempus autem quo corpus ſpatium $CG = s$ abſoluit eſt $= \int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{V}{ff}\int\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2\sqrt{v}} = \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

774. Ex data igitur celeritate $\sqrt{v}$ multo facilius ſpatium s aſſignatur, quo percurſo corpus illam celeritatem acquiſiuit, quam viciſſim ex dato ſpatio s celeritas $\sqrt{v}$. Hancque obrem tempus non per ſpatium ſed per ipſam celeritatem determinare licuit.

Coroll. 2.

775. Intelligitur autem ex formulis inuentis corpus nunquam tantam celeritatem acquirere poſſe, quanta eſt celeritas fluuii; nam ſi ponatur $v = b$, fit ſpatium s itemque tempus quo fit $v = b$, infinitum.

Coroll. 3.

776. Sin autem ſemel fuerit $v = b$, id quod accidere poteſt, ſi corpori a vi externa tanta celeritas tribuatur, tum ob $dv = 0$, corpus progrediendo neque augmentum celeritatis capiet, neque decrementum, ideoque tum motu vniformi promouebitur.

Coroll. 4.

777. Si logarithmus qui in aequatione, qua relatio inter ſpatium s et celeritatem $\sqrt{v}$ continetur in ſeriem conuertatur habebitur $\frac{ffs}{2V} = \frac{v}{2b} + \frac{2v\sqrt{v}}{3b\sqrt{b}} + \frac{3v^2}{4b^2} + \frac{4v^2\sqrt{v}}{5b^2\sqrt{b}} +$ etc. ex qua expreſſione patet celeritatem per datum ſpatium

tium s acquiſitam eo ſore maiorem quo maius fuerit circa ff.

Coroll. 5.

778. Quo igitur corpus quam celerrime a fluuio abripiatur, eam eius partem, quae impulſum aquae excipit, quae eſt corporis pars poſtica, ita oportet eſſe comparatam, vt ea ſi directe in aquam occurreret maximam pateretur reſiſtentiam. Maxima igitur erit acceleratio ſi pars poſtica fuerit plana ad curſum fluuii normalis.

Coroll. 6.

779. Vti difficile eſt ad datum ſpatium percurſum celeritatem corporis aſſignare, ita facilius poſt datum quodvis temporis interuallum celeritas corporis definiri poteſt. Poſito enim tempore ab initio motus praeterlapſo $= t$, erit $t = \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$, vnde viciſſim fit $\sqrt{v} = \frac{ffbt}{2V + fft\sqrt{b}}$.

Coroll. 7.

780. Si quantitates b, v, ff, et V exprimuntur in partibus milleſimis pedis Rhenani, tempus t, quo data celeritas $\sqrt{v}$ acquiritur, innoteſcet in minutis ſecundis per hanc aequationem $t = \frac{V\sqrt{v}}{125ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$.

Coroll. 8.

781. Viciſſim vero ſi tempus t detur in minutis ſecundis, atque quantitates b, ff et V partibus milleſimis pedis Rhenani exprimantur, iſta aequatio $\sqrt{v} = \frac{125ffbt}{V + 125fft\sqrt{b}}$ praebebit celeritati acquiſitae altitudinem debitam v in particulis milleſimis eiusdem pedis.

Scholion 1.

782. Poſuimus hic in initio C corpus nullam habuiſſe celeritatem, eique omnem motum quem acquirit, a motu aquae imprimi: ſed pari modo problema tractari poteſt, ſi corpori ab initio datus motus tribuatur, cuius directio cadat in eandem rectam CL, in qua tum directio fluminis, tum poſitio axis corporis AB ſunt ſitae. Si, autem quaeſtio hoc modo extendatur, caſus nonnulli inter ſe prorſus diuerſi a ſe inuicem probe ſunt diſcernendi; quorum primus eſt, ſi corpus dum in C aquae immittitur, iam habeat motum in directione fluuii CL ſed minorem quam ipſe habet fluuius; qui caſus ex ipſa ſolutione allata facile reſoluetur; nam quoniam celeritas fluvii maior eſt, corpus accelerabitur, atque ſi celeritas initialis debita ſit altitudini k, aequationis differentialis $\frac{dv}{(\surd b-\surd v)^2} = \frac{ffds}{V}$ integralio fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\surd v}{\surd b-\surd v} - \frac{2\surd k}{\surd b-\surd k} - 2(\frac{\surd b-\surd k}{\surd b-\surd v}$ atque tempus, quo ſpatium s abſoluit, ſeu celeritatem $V v$ acquirit, reperietur $= \frac{2V\surd v}{ff(\surd b-\surd v)\surd b} - \frac{2V\surd k}{ff(\surd b-\surd k)\surd b}$; quae omnia huc redeunt vt hic motus tanquam pars motus a quiete profecti conſiderari queat. Initium enim motus cenſendum eſt fuiſſe ſupra punctum C interuallo $s = \frac{2V\surd k}{ff(\surd b-\surd k)} - \frac{2V}{ff}(\frac{\surd b}{\surd b-\surd k}$. Ex hoc ſcilicet puncto corpus ex quiete motum in ſingulis ſpatii CL punctis easdem habebit celeritates, quas in ipſo caſu oblato, quo corpus data celeritate $V k$ ex puncto ipſo C egreditur. Deinde ſi celeritas corporis initialis in C directioni fluminis directe fuerit contraria, tum corpus primum contra curſum fluminis aſcendet, donec eius motus penitus ſit extinctus, indeque quaſi

quaſi ex quiete a fluuio deorſum abripietur. Euolutio autem huius caſus ſequitur ex praecedente ponendo $\sqrt{k}$ negatiuum, ſi quidem in C celeritatem habeat $\sqrt{k}$ vnde fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}}$. Ex hac aequatione obtinebitur interuallum, per quod corpus vltra C contra fluuii curſum progredietur ſi ponatur $v = 0$; tum vero fit $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}} = \frac{-2k}{2(\sqrt{b}+\sqrt{k})^2} - \frac{2k\sqrt{k}}{3(\sqrt{b}+\sqrt{k})^3} - \frac{2k^2}{4(\sqrt{b}+\sqrt{k})^4}$ - etc. ex qua valor ipſius $-s$ deſideratum ſpatium praebebit. Tertius denique caſus ab his maxime diſcrepat, quo corpus initio in C motum habet velociorem ſecundum fluuii directionem ſed maiorem. Tum enim motus corporis non ſolum in flumine retardabitur, ſed etiam altera corporis ſuperficies verſus A in aqua conſtituta actionem aquae ſentiet, poſterior vero pars in B, quae hactenus ſola vim ab aqua eſt paſſa, erit libera. Offendet igitur corpus hoc in caſu reſiſtentiam quae ſit aequiualens reſiſtentiae, quam ſuperficies plana ff eadem celeritate in aquam impingens ſentiret. Quare ſi celeritas initialis in C ponatur $= \sqrt{k}$ et in G $= \sqrt{v}$, erit reſiſtentia $= \frac{Mff(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$, vnde fit $dv = -\frac{ffds(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$ atque integrando $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\sqrt{b}} + 2\,(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{b}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}}$: ex qua intelligitur corpus demum infinito ſpatio percurſo ipſam fluuii celeritatem adipiſci.

Scholion 2.

783. Quanquam haec omnia ex calculo recte inſtituto conſequantur, tamen ſi ad rem ipſam ſpectemus, correctione indigent. Miſſa enim ea circumſtantia, cuius ante mentionem fecimus, qua aqua aliam exercet reſiſten-

tiam praeter eam quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, in hoc motu ſuper fluuiis ad aerem quoque reſpici oportet, qui parti corporum ex aqua eminenti nonnullam reſiſtentiam opponit, quae quamuis fere octingenties minor ſit quam reſiſtentia aquae ceteris paribus, tamen euentus a ſola aqua oriundos nonnihil turbat. Ita reſiſtentia aeris in cauſa eſt, cur corpora a fluuio abrepta nunquam tam prope ad celeritatem fluuii accedant, quam calculus ſuperior indicat, neque etiam ob hanc ipſam cauſam corporis motus ſi fuerit aequalis motui fluminis, conſeruabitur, ſed retardabitur. Deinde ſi corpus in fluuio maiore deſcendat celeritate, quam ipſe fluuius habet, tum ob aeris reſiſtentiam non ſolum tandem ipſum fluuii celeritatem acquiret, ſed etiam minorem, quoad reſiſtentia aeris aequalis fiat impulſui aquae. Ad hunc effectum quodammodo aeſtimandum ponamus partem corporis in aere verſantem eandem ab aere pati reſiſtentiam, quam perpeteretur ſuperficies plana $\underline{bb}$ eadem celeritate contra aerem mota. Si ergo celeritas corporis, qua in aerem impingit debita ſit altitudini $\underline{v}$, erit reſiſtentia aequalis ponderi molis aereae cuius volumen eſt $= bbv$, ſeu ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $= \frac{bbv}{800}$. Huius vis igitur ſi ratio habeatur in ſolutione problematis, prodibit $dv = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffds}{V} - \frac{bbvds}{800V}$, ex qua intelligitur vltimam celeritatem quam corpus acquiret non fore $\sqrt{b}$ ſed minorem, fiet ſcilicet $f\sqrt{b} - f\sqrt{v} = \frac{b\sqrt{v}}{25}$ circiter, ſeu $\sqrt{v} = \frac{25 f\sqrt{b}}{25f+b}$. Quamobrem ſi portio ſuperficiei corporis extra aquam eminentis ſit $\underline{n}$ vicibus maior, quam ea, quae ſub aqua verſatur,

ſatur, erit proxime $bb = nff$, indeque celeritas vltima $Vv = \frac{2nVb}{2n+Vn}$. Hincque etiam immutationes in reliquis caſibus ab aere oriundae colligi poterunt. Sed in his omnibus aerem quietum poſuimus, aliter enim res ſe habebit, ſi aer vento agitetur, qui motus pariter non difficulter in calculum inducetur.

PROPOSITIO 76.

Problema.

784. *Si corpus* AB *in aqua quieſcente non ſolum moueatur curſu directo in directione* BAL *ſed etiam ſecundum hanc directionem propellatur a vi quacunque conſtante, hoc eſt tali, quae corpus motum aeque acceleret ac quieſcens; definire motum huius corporis.* Tab. XXXII. fig. 1.

Solutio.

Potentiam corpus ad motum ſollicitantem hic primum ponimus abſolutam ſeu talem, quae dato tempuſculo eandem producit accelerationem quacunque celeritate moveatur; eiusmodi ſcilicet potentiam exercent vires remorum, quibus ſiquidem remiges perpetuo eandem vim adhibeant, naues ſemper aequaliter propelli ſolent. Sit itaque potentia iſta corpus in directione AL propellens $= p$, denotante p pondus illi vi aequale: atque reſiſtentia, quam portio antica EAF in aqua patitur, tanta ſit quantam pateretur ſuperficies ff ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ponamus nunc corporis centrum gravitatis iam ſpatium CG $= s$ confeciſſe atque in puncto C

 motum

Digitized by Google

motum inchoaſſe, in G vero celeritatem habere debitam altitudini v; vnde reſiſtentia, quam in G ſentiet erit $= ffv$; ſeu ſi corporis maſſa ſeu pondus dicatur M et volumen partis ſubmerſae $= V$, erit vis reſiſtentiae $=$ ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Ex his igitur dum corpus elementum $Gg = ds$ percurrit fiet $dv = \frac{pds}{M} - \frac{ffvds}{V}$ ſeu $dv + \frac{ffvds}{V} = \frac{pds}{M}$ quae ducta in $e^{ffs:V}$ fit integrabilis, atque aequatio integrata erit $e^{ffs:V}v = \frac{\int e^{ffs:V}pds}{M} = \frac{pV}{Mff}(e^{ffs:V} - 1)$, integratione ita inſtituta vt euaneſcat v poſito $s = 0$. Quocirca habebitur iſta aequatio $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ ex qua celeritas corporis in ſingulis ſpatii deſcribendi CGL punctis innoteſcit. Tempus vero quo ſpatium $CG = s$ a centro grauitatis G percurritur innoteſcet ex integrali ipſius $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ quod reperitur $= \frac{2\sqrt{MV}}{f\sqrt{p}} \left(e^{ffs:2V} + \sqrt{(e^{ffs:V} - 1)} \right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

785. Corpus ergo continuo accelerabitur creſcente enim s creſcit v; atque ſpatio iam infinito emenſo acquiret celeritatem, cuius altitudo debita erit $= \frac{pV}{Mff}$; ſeu celeritas maxima, quam acquirere poteſt erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$.

Coroll. 2.

786. Intelligitur autem ex formula inuenta $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ corpus mox tantam adipiſci celeritatem, quae inſenſibiliter differat a celeritate vltima. Nam ſi fuerit ſpatium s modice magnum, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam abibit in tam exiguam fractionem, quae prae 1 euaneſcat dum-

dummodo enim fit $\frac{ffs}{V} = 10$ ſeu $s = \frac{10V}{ff}$, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam minor fit quam $\frac{1}{10000}$.

Coroll. 3.

787. Neglecto ergo ipſo motus initio corpus ſatis tuto concipi poteſt quaſi motu vniformi progrederetur: atque celeritas, qua vniformiter promouebitur erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$; quae expreſſio ſi f et V exprimantur in particulis milleſimis pedis Rhenani; tum $\frac{250\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ dabit ſpatium in eadem menſura, quod corpus vno minuto ſecundo abſoluet.

Coroll. 4.

788. Celeritas ergo, qua nauis remis propulſa in aqua quieſcente promouebitur, eſt in ſubduplicata ratione virium remorum: vnde ſi remigum numerus quadruplicetur, nauis duplo celerius progredietur.

Coroll. 5.

789. Hinc ſi duae naues inter ſe prorſus ſimiles remis propellantur, atque maioris longitudo AB ſit $= A$, minoris $= a$; maior vero propellatur vi $= P$, minor vero vi p, erunt celeritates, quibus incedent inter ſe vt $\frac{\sqrt{P}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{a}$. Quo igitur ambae naues aequali celeritate progrediantur, neceſſe eſt vt vires remorum teneant rationem duplicatam longitudinum.

Coroll. 6.

790. Deinde etiam intelligitur, quo minor ſit reſiſtentia nauis, eo maiorem fore celeritatem quam eadem vis

vis remorum generat. Cum enim ſit reſiſtentia abſoluta vt ff, erit celeritas producta in reciproca ſubduplicata ratione reſiſtentiae, id eſt ſi reſiſtentia quadruplo ſit minor, eadem vis remorum duplo maiorem celeritatem naui imprimet.

Coroll. 7.

791. Quoniam denique V ad M rationem tenet conſtantem; namque V ductum in grauitatem ſpecificam aquae, aequatur ipſi M; manifeſtum eſt celeritates nauium remis propulſarum eſſe in ratione compoſita ex directa ſubduplicata virium remorum et reciproca ſubduplicata reſiſtentiarum abſolutarum.

Scholion.

792. Quanquam hae determinationes tantum ad aquam quieſcentem ſunt accommodatae, tamen facile ad motum nauium in fluuiis propulſarum a remis transferri poſſunt; ſiquidem motus fiat ſecundum ipſius fluuii directionem. Nam ſi celeritas fluuii ſit debita altitudini b ſeu ipſa celeritas $= \sqrt{b}$, tum ſi nauis in fluuio deſcendat, eius celeritas a vi remorum acquiſita augenda eſt celeritate fluuii, ita vt tale corpus, quale contemplati ſumus in fluuio deſcendendo acquirat velocitatem $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} + \sqrt{b}$. At ſi idem corpus contra fluuii curſum ſurſum propellatur, tum celeritatem acquiret $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} - \sqrt{b}$; ex qua expreſſione intelligitur, niſi $\frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ maior ſit quam $\sqrt{b}$, corpus curſum fluminis ſuperare non poſſe, neque aſcendere. Quoniam autem haec ad vim remorum reſpiciunt, notandum eſt vires remorum vtrinque debere eſſe aequales et ſimiliter appli-

Digitized by Google

applicatas, quo vis ex iis coniunctim reſultantis directio per medium nauis tranſeat, ſeu in rectam BA incidat; niſi enim hoc obſeruetur, corpus ſeu nauis curſum directum tenere non poterit, animum namque hic abſtrahimus ab actione gubernaculi, qua vtique huic incommodo ſubveniri poſſet.

PROPOSITIO 77.

Problema.

793. *Si ſuperficies plana in ſitu verticali poſita* e f *motu ſibi parallelo moueatur vniformiter indirectum ſecundum directionem* CGL; *atque in eam impingat fluidum in directione* VG *data cum celeritate, determinare vim, quam fluidum allapſu ſuo in ſuperficiem exercebit.* Tab. XXXIII. fig. 1

Solutio.

Sit celeritas qua ſuperficies plana ef progreditur debita altitudini v, ſeu $= \sqrt{v}$, atque celeritas, qua fluidum mouetur $= \sqrt{c}$, anguli autem CGV, quem directio motus fluidi VG cum directione motus ſuperficiei CGL conſtituit ſinus ponatur $= \mu$ et coſinus $= \nu$. Anguli autem VGf, quem directio motus fluidi VG conſtituit cum planitie ſuperficiei ſinus ſit $= m$ et coſinus $= n$, poſito ſinu toto $= 1$; denique ſit $gg =$ ipſi ſuperficiei, cuius centrum grauitatis ſit in puncto G. Iam ſi ſuperficies quieſceret, ex ante demonſtratis foret vis, quam fluidum in ſuperficiem exereret $= m^2 g^2 c$, ſeu aequaretur ponderi molis ex eadem materia fluida conſtantis, cuius volumen eſt $= m^2 g^2 c$. At cum ſuperficies non quieſcat ſed celeritate $\sqrt{v}$ progrediatur in directione GL concipiatur to-

tum ſyſtema ex fluido et ſuperficie conſtans retro in directione GC celeritate $\sqrt{v}$ promoueri, quo fiet vt ſuperficies ef in quietem redigatur; vis autem fluidi in ſuperficiem exerta vtroque caſu erit eadem. Per compoſitionem motus autem innoteſcet, tam celeritas fluidi reſultans quam directio: Cum enim nunc fluidum duplici feratur motu, altero ſecundum directionem G N celeritate $\sqrt{c}$ altero vero in directione G M celeritate $\sqrt{v}$. Si capiatur $GN = \sqrt{c}$ et $GM = \sqrt{v}$: atque formetur parallelogrammum GMKN, diagonalis GK tam celeritatem fluidi reſultantem, quam eius directionem ſuggeret, ita vt fluidum cenſendum ſit celeritate GK in directione UG in ſuperficiem ef quieſcentem impingere. Demiſſo autem ex G in NK productam perpendiculo GH, erit ob anguli GNH ſinum $= \mu$ et coſinum $= \nu$, perpendiculum $GH = \mu\sqrt{c}$ et $NH = \nu\sqrt{c}$, vnde fiet $KH = \nu\sqrt{c} - \sqrt{v}$ atque $GK = \sqrt{(c - 2\nu\sqrt{cv} + v)}$. Ex his reperietur anguli NGK ſeu UGV ſinus $= \frac{\mu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{cv}+v)}}$ et coſinus $= \frac{\sqrt{c}-\nu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{cv}+v)}}$ atque hinc prodit anguli UGf ſinus $= \frac{m\sqrt{c}-(m\nu-n\mu)\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{cv}+v)}}$ qui ergo eſt ſinus anguli incidentiae ſub quo fluidum impinget in ſuperficiem, quare cum fluidi celeritas ſit $= \sqrt{(c - 2\nu\sqrt{cv} + v)}$, prodibit vis, quam fluidum in directione vera VG celeritate $\sqrt{c}$ motum, in ſuperficiem ef motam celeritate $\sqrt{v}$ in directione GL, $= (m\sqrt{c} - (m\nu - n\mu)\sqrt{v})^2 g^2$, huiusque vis directio tranſibit per ſuperficiei centrum grauitatis G atque ad ipſam ſuperficiem erit normalis. Q.E.I.

Coroll. 1.

794. Si anguli CGf ſinus ponatur $= q$, cum ſit $q = m\nu - n\mu$, erit vis fluidi, quam in ſuperficiem exerit =

$=(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2gg$, ſeu tantum fluidi volumen pondere adaequabit.

Coroll. 2.

795. Quoniam anguli U G f ſinus inuentus eſt $= \frac{m\sqrt{c}-q\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{c.v}+v)}}$, manifeſtum eſt eſſe debere $m\sqrt{c} > q\sqrt{v}$, ſiquidem ſuperficies plana verſus plagam G K debeat vrgeri. Nam ſi eſſet $m\sqrt{c} < q\sqrt{v}$ tum ſuperficies adeo vrgeretur verſus plagam U V.

Coroll. 3.

796. Si ſuperficies plana ef normaliter ad curſum fluidi V G conſtituatur, ita vt ſit $m=1$ et $n=0$, erit vis quam ſuperficies patitur $= (\sqrt{c}-\nu\sqrt{v})^2gg$: quae vis ideo eo minor erit, quo maior fuerit anguli V G C coſinus ν.

Coroll. 4.

797. Manente autem poſitione ſuperficiei ef eadem reſpectu directionis motus ipſius G L, vis fluidi eo maior erit quo maior fuerit ſinus m. Quare maximam patietur vim ſuperficies, ſi angulus V G f fuerit rectus.

Coroll. 5.

798. Sin autem ſuperficies ef iuxta motus ſui directionem G L collocata fuerit, erit angulus C G f euaneſcens et conſequenter $q=0$; hoc igitur caſu ſuperficies eadem patietur vim ac ſi quieſceret.

Coroll. 6.

799. Si fluidum veniret ex regione vG, ita vt directio vG tantum inclinet ad Ge, quantum directio V G

 inclinat

inclinat ad Gf, manebit anguli vGf idem ſinus $=m$; ideoque ob angulum CGf inuariatum, cuius ſinus eſt q, erit vis quam ſuperficies ſufferet eadem, quae in altero caſu ſcilicet $=(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2gg$.

Coroll. 7.

800. Ponamus angulum VGC manere inuariatum; definiri poterit angulus VGf, ſeu poſitio ſuperficiei ef, vt maximam vim a fluido ſufferat. Reperietur autem anguli VGf tangens $=\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{c}-\nu\sqrt{v}}{\mu\sqrt{v}}$, atque vis erit $=(c-2\nu\sqrt{cv}+v)g^2$.

Scholion

801. Haec propoſitio in ſequentibus maxime nobis erit, neceſſaria, vbi tum vim venti in vela mota tum vim fluuii in nauem promotam ſumus inueſtigaturi. Facile autem patet niſi venti celeritas ſit maxima ſeu prope infinita, ipſum velorum motum negligi omnino non poſſe; ſi enim vela in eandem plagam progrediantur in quam ventus tendit, perſpicuum eſt vim venti in vela eo fore minorem, quo celerius vela promouentur, atque adeo euaneſcere, ſi vela eandem, quam ipſe ventus, habeant celeritatem. Quamobrem hac propoſitione praemiſſa licebit nobis ſequentia problemata aggredi in quibus inquiremus, quomodo naues a vento propellantur, tam curſu directo, quam vtcunque obliquo.

PROPOSITIO 78.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 2. 802. *Si corpus ſeu nauigium plano diametrali* AB *praeditum a vento ita ſollicitetur, vt curſu directo ſecundum dire-*

directionem GL *in aqua quieſcente promoueatur, determinare motum huius nauigii, et celeritatem maximam, quam recipere poterit.*

Solutio.

Quoniam nauis curſu directo in directione BAL moueri ponitur, in quam ſimul directio reſiſtentiae incidit, oportet vt media directio venti in eandem directionem incidat. Quare cum vis venti ſemper normalis ſit in planum velorum, atque eius media directio per centrum grauitatis velorum tranſeat, requiritur vt planum velorum normale ſit ad planum diametrale AB, atque vt velorum centrum grauitatis in idem hoc planum incidat. Repraeſentet itaque EF velorum planitiem, cuius area ſit $=gg$, ſitque G centrum grauitatis velorum in axe AB poſitum; hocque modo fiet vt media directio venti in rectam GL incidat, eaque tum curſus directus, quam motus progreſſiuus in recta GL conſeruetur. Impingat nunc ventus in vela in directione quacunque obliqua VG, ſitque celeritas venti debita altitudini $\underline{c}$, atque anguli VGC, quem directio venti cum directione motus conſtituit, ſinus ſit $=\mu$ et coſinus $=$ V; eritque anguli VGF, quem directio venti VG cum planitie velorum conſtituit ſinus $=v$, qui ante poſitus erat m, et coſinus, qui ante erat $\underline{n}$, hoc caſu erit $=-\mu$, quoniam angulus VGF eſt obtuſus. Ponamus porro nauem in puncto C motum incepiſſe, atque iam abſoluiſſe ſpatium $CG=x$, hicque habere celeritatem debitam altitudini v. His poſitis ex praecedente propoſitione erit vis venti, qua nauem vrgebit in directione GL,

$=(m\sqrt{c}-(m\nu-n\mu)\sqrt{v})^2g^2=(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2$, tantum ſcilicet aeris volumen pondus habebit vi iſti propellenti aequalem; ſiue cum aeris grauitas ſpecifica ſe habeat proxime ad aquam vt 1 ad 800 ſeu 1 ad 784, quam poſteriorem rationem vſurpabimus quia 784 eſt numerus quadratus, nobiſque radicis extractione eſt opus, pondus aquae vi illi aequale volumen habebit $=\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2gg}{784}$. Exprimat nunc ſuperficies plana ff reſiſtentiam, quam nauis in curſu directo ab aqua patitur, ſeu ſuperficies plana ff eandem patiatur quam nauis, ſi directe contra aquam eadem celeritate impingeret. Hinc igitur erit vis reſiſtentiae aequalis ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $=ffv$, quoniam aquam quieſcentem aſſumimus. Ex his ergo ſi nauis maſſa ſeu pondus dicatur $=M$ et volumen partis ſubmerſae $=V$ erit vis nauem propellens in directione G L $=\frac{M(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2gg}{784V}$ vis autem repellens $=\frac{Mffv}{V}$; ex quibus conficitur acceleratio, dum nauis per elementum $Gg=dx$ progreditur, $dv=\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2dx}{784V}-\frac{ffvdx}{V}$. Tamdiu igitur nauis accelerabitur, quam diu fuerit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2}{784}$ maius quam ffv; at quamprimum tantam acquiſiverit celeritatem $\sqrt{v}$ vt ſit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2}{784}=ffv$, quod quidem demum poſt ſpatium infinitum confectum eueniet, ſed mox tam prope iſtam celeritatem aſſequetur vt diſcrimen ſit inſenſibile. Hancobrem excepto motus initio nauis motu vniformi in directione GL curſuque directo promouebitur celeritate altitudini v debita, cuius valor ex ſuperiore aequatione reperitur $\sqrt{v}=\frac{\nu g\sqrt{c}}{28f+g}$ ita vt ipſa nauis celeritas ſe habitura ſit ad celeritatem venti vt νg ad $28f+g$. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

803. Cum celeritas, quam nauis hoc vento propulſa acquirit ſit $= \frac{\nu g \sqrt{c}}{2\delta f + g}$, intelligitur celeritatem nauis ceteris paribus rationem tenere ſimplicem celeritatum venti, ita vt in qua ratione venti celeritas augeatur, in eadem nauis celeritas creſcat.

Coroll. 2.

804. Quod autem ad ſuperficiem velorum gg attinet, perſpicitur celeritatem corporis quidem creſcere, ſi vela multiplicentur, ſed nullam tenere rationem fixam. Si enim vela in infinitum augeantur, celeritas nauis tamen vltra datum terminum non augebitur, acquiret ſcilicet facto $gg = \infty$ celeritatem $= \nu \sqrt{c}$.

Coroll. 3.

805. Quando ergo vela iam cousque fuerint aucta vt $2\delta f$ reſpectu ipſius g fere euaneſcat, tum quantumuis amplius vela multiplicentur, naui tamen maior celeritas non imprimetur. Ex quo colligi licet inutile eſſe vela vltra datum terminum multiplicare; qui terminus ex reſiſtentia in praxi facile determinabitur.

Coroll. 4.

806. Ex his etiam concluditur lucrum non adeo conſiderabile obtineri, etiamſi reſiſtentia vehementer diminuatur. Si enim vela tanta accipiantur vt g multum excedat $2\delta f$, tum parum intererit, ſi reſiſtentia etiam penitus tolleretur. Attamen quo minor eſt reſiſtentia, eo paucioribus velis erit opus. Co-

Coroll. 5.

807. Ceterum ſponte patet manente nauis diſpoſitione eadem, celeritatem venti eo fore maiorem quo minor fuerit angulus VCG: vnde ventus directe ſecundum CG ſeu a puppi vrgens naui maximam imprimet velocitatem.

Scholion. 1.

808. Ex his ſatis ſuperque intelligitur quantum interſit diſcrimen inter naues quae vento, easque quae remis propelluntur. In iis enim quae remis promouentur plurimum intereſt vt reſiſtentia quantum fieri poteſt diminuatur, cum celeritates impreſſae teneant rationem reciprocam ſubduplicatam reſiſtentiarum: contra vero in iis navibus quae a vi venti propelluntur diminutio reſiſtentiae non tantum lucrum affert; ex quo in conſtructione nauium maximum oritur diſcrimen, pronti vel velis vel remis deſtinantur. Haec autem ipſa differentia in praxi, ſi naves vſu receptas intueamur, apprime obſeruata deprehendetur. Triremes enim ſeu eiusmodi naues, quae remis mouentur, partem anticam habent acutiſſimam, vnde reſiſtentia oritur perquam exigua. Alteram vero nauium ſpeciem vento deſtinatam videmus parte antica ſatis obtuſa praeditam, quae parum ſit idonea ad reſiſtentiam diminuendam. Ex his autem ſponte ſequitur, quommodo eiusmodi naues, quae tam remis quam vento coniunctim promoueri ſolent, comparatas eſſe oporteat, vt ſint maxime aptae; ſcilicet perſpicuum eſt medium quoddam eſſe eligendum inter vtramque ſpeciem tractatam. At hoc diſcrimen tantum etiamnum eſt petitum ex curſu directo,

maius

maius deprehendatur cum curſus obliquos examini ſubiecerimus, ad quos naues velis inſtructae praecipue debent adaptari, cum contra in nauibus remis propellendis ad curſum obliquum omnino non opus ſit reſpicere. Ceterum ex modo ſolutionis facile erit calculum abſoluere, ſi praeter ventum etiam remi vrgeant, atque nauis coniunctim a remis et velis propellatur. Simili modo quilibet non difficulter calculum inſtituet, ſi motus non fiat in aqua quieſcente, ſed in fluuio, dummodo directiones fluuii et motus corporis congruant; atque curſus ſit directus; quamobrem huiusmodi inueſtigationibus diutius non adhaerebimus.

Scholion 2.

809. Quod hic ſuperficiem velorum perfecte planam poſuimus, id ſolutionem datam minime turbat etiamſi vela a vento in figuram concauam extendantur: in ſequenti enim libro quo velorum doctrina imprimis excutietur, demonſtrabitur ſemper velum planum aſſignari poſſe eandem vim excipiens, ita vt quae hic de velis planis afferuntur, aeque valeant pro velis, quemadmodum in praxi vſurpantur. Deinde etiam ſolutio ab experientia in hoc diſſentire videtur quod ventum maxime lucroſum ſtatuat eum, qui directe a puppi venit, cum tamen obſeruatione conſtet naues felicius a vento non nimis obliquo propelli. Ratio autem huius diſcrepantiae ſita eſt inconſueta collocatione velorum qua vela tum in puppi tum in prora tum etiam in medio nauis expandi ſolent: vnde facile colligitur, ſi ventus recta a puppi ad proram tendat, tum poſteriora vela anterioribus ventum adimere, atque impedire, quo-

minus ventus in vela anteriora impingere queat. Cum autem hoc non eueniat, ſi directio venti eſt obliqua, mirum non eſt ventum obliquum maiorem celeritatem producere ſolere quam directum. Sed haec tantum ſunt intelligenda, ſi nauis pluribus malis ſit inſtructa, hoc enim caſu tantum illud incommodum locum habet, at ſi vnicus adſit malus, ventuſque adeo libere in omnia vela incurrere poſſit, tum memoratus diſſenſus theoriae cum praxi non obſeruatur, ſed potius nauis eo celerius progredi deprehenditur, quo minus directio venti a directione curſus nauis aberrat. Eiusmodi autem diſſenſus apparentes ſaepius occurrunt praecipue in hac doctrina de motu nauium, ſed ſemper ſi omnes circumſtantiae probe perpendentur facile diluentur.

Scholion 3.

810. Hi igitur fere ſunt caſus, quibus naues curſu directo motuque rectilineo in aqua tam quieſcente quam fluente incedere poſſunt, ad quem curſum requiritur, vt tum ipſius motus directio, tum media directio reſiſtentiae tum directio vis ſollicitantis tum etiam fluuii directio inter ſe congruant; atque in axem ſeu rectam a puppi ad proram ductam incidant. Quarum conditionum vnica ſi defecerit, vel curſus directus vel motus rectilineus turbabitur, euenietque vt vel motus directio ab axe nauis ſeu diametro longitudinali a puppi ad proram porrecta declinet, vel etiam centrum grauitatis cogatur in linea curua incedere, quae omnia probe inter ſe diſcernere, et quodque ex ſuis cauſis deriuare omni attentione erit opus. Interim ex traditis ſatis liquet ſi vis ſollicitans directionem habeat ſecundum nauis longitudi-

tudinem, tum etiamſi curſus vehementer eſſet obliquus, tamen breui in curſum directum mutatum iri. Quando enim vis ſollicitans perpetuo in eandem plagam tendit, tum motus ſi quis affuerit obliquus mox tam deſtruetur, vt eius directio in directionem vis ſollicitantis incidat. Atque hinc fit, vt naues quae remis propulſantur, perpetuo ſecundum ſuam longitudinem progrediantur, cum directio vis remorum ſemper eo tendat, quamuis ſubinde ope gubernaculi directio curſus immutetur. Tum enim quaſi ad momentum tantum durat motus curuilineus, ſtatimque in directum tranſmutatur, cuius rei ratio potiſſimum in reſiſtentia laterali eſt ſita, quae in his nauibus vehementer eſt magna, motumque obliquum ſtatim deſtruit. Atque ob hanc rationem curſus directus proprius eſt illi nauium ſpeciei, quae remis propelluntur; nam quoniam vis remorum in quamuis plagam aeque exerceri poteſt, atque motus ſecundum longitudinem ob minimam reſiſtentiam eſt facillimus, abſurdum foret huiusmodi naues ad motum obliquum inſtruere. Longe aliter autem comparata eſt ratio nauium, quae vento ad motum cientur, cum directionem venti non ad arbitrium formare liceat, ſed eo vento, quem fortuna ſuggerit, ad iter inſtitutum conficiendum vti oporteat. Quoties igitur euenit vt curſus intentus a directione venti tantopere diſcrepet, vt curſus directus omnino inſtitui nequeat, tum ad curſum obliquum eſt confugiendum, qui eo felicius vſurpabitur, quo propius verſus regionem vnde ventus flat nauigari poterit. In his igitur nauibus, quae vento propelluntur, praecipue curſus obliquus attendi debet, indeque potiſſimum regulae pro con-

 ſtru-

Digitized by Google

ſtructione et velificatione nauium ſunt petendae. Quamobrem iſtum curſum obliquum, quo nauis non ſecundum longitudinem ſuam progreditur, imprimis in iis nauibus examini ſubiiciemus, quae non remis ſed ſolo vento ad motum cientur.

PROPOSITIO 79.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 3

811. *Si corpus ſeu nauis* AEBF *in aqua quieſcente acceperit curſum obliquum ſecundum directionem* GL *data cum celeritate, determinare tam ipſam viam, quam eius centrum grauitatis* G *deſcribet, quam vbique curſus obliquitatem, ſeu poſitionem axis longitudinalis* AB.

Solutio.

Sit AGL angulus declinationis curſus, quem directio motus GL cum poſitione axis longitudinalis BA ſeu ſpinae conſtituit, huiuſque anguli ſinus ponatur s; coſinus vero $= r$ celeritas autem corpori impreſſa ſecundum directionem GL debita ſit altitudini v. Deinde ſit RM media directio reſiſtentiae, quam corpus hoc motu obliquo ab aqua patietur, quae cum directione ſpinae ſeu axis nauis AB angulum MRB conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$, coſinus vero $= \varrho$; atque reſiſtentia quam nauis hac obliquitate in aqua mota patitur, tanta ſit, quantam pateretur ſuperficies plana uu eadem celeritate directe contra aquam in directione MR mota; vnde vis reſiſtentiae, qua corpus ſecundum directionem RM vrgebitur, aequalis erit ponderi molis aqueae, cuius volumen eſt $= uuv$ pendebunt autem quantitates σ, ϱ et u ab angulo obliquitatis

AG

AGL eiusve ſinu s atque ſtructura totius corporis. Quare ſi maſſa ſeu pondus totius corporis ponatur $= M$ atque volumen partis aquae ſubmerſae $= V$ erit vis reſiſtentiae in directione RM vrgentis $= \frac{Muuv}{V}$; quae vis duplicem exeret effectum quorum alter conſiſtit in motu progreſſiuo centri grauitatis G alterando, alter vero in corpore circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum convertendo. Ad priorem autem effectum inueſtigandum oportet vim RM tanquam in ipſo centro grauitatis G in directione ſibi parallela GH applicatam concipere. Anguli igitur HGK, quem directio reſiſtentiae GH cum directione motus GK conſtituit, ſinus erit $= r\sigma - s\varrho$, atque coſinus $= s\sigma + r\varrho$. Hinc vis reſiſtentiae quae eſt $= \frac{Muuv}{V}$ reſolvetur in binas laterales GK, KH, quarum alterius GK directio in ipſam motus directionem GL incidit, altera KH vero ad hanc erit normalis: ex quibus vis tangentialis GK erit $= s\sigma + r\varrho \frac{Muuv}{V}$, et vis normalis KH $= \frac{(r\sigma - s\rho)Muuv}{V}$. Vis igitur tangentialis retardabit corporis motum, efficietque, vt dum corpus elementum ſpatii $Gg = dx$ percurrit, futurum ſit $dv = -\frac{s\sigma + r\rho uuvdx}{V}$. Vis normalis autem corpus a ſemita rectilinea deflectet cogetque arcum circularem concauum verſus regionem M deſcribere, cuius radius erit $= \frac{2V}{(r\sigma - s\rho)u^2}$. Quod denique ad alterum effectum attinet, quo corpus a vi reſiſtentiae conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, patet primo conuerſionem fieri in regionem AF, ita vt per eam declinatio AGL magis augeatur, ſi quidem centrum reſiſtentiae R intra centrum grauitatis G et proram

A cadat. Dicto autem interuallo $GR = z$, fiet momentum vis reſiſtentiae ad hanc conuerſionem producendam $= \frac{cMuu\tau z}{V}$, quod momentum diuiſum per ipſius corporis momentum inertiae reſpectu eiuſdem axis verticalis per centrum grauitatis G tranſeuntis, dabit vim gyratoriam cui motus angularis momentaneus eſt proportionalis. Sin autem corpus motum angularem iam habuerit, tum ex vi gyratoria eius incrementum cognoſcetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

812. Retardatio ergo motus eo erit maior, quo minor fuerit angulus HGK, hoc eſt quo minor fuerit differentia inter angulos GRM et AGL. Ex quo ſequitur quo magis angulus GRM excedat angulum AGL eo fore diminutionem motus minorem.

Coroll. 2.

813. Quia porro plerumque reſiſtentia eo fit maior, quo magis curſus obliquus a directo differt, ſeu quo maior fuerit angulus AGL, dummodo rectum non excedat, valor ipſius $\underline{uu}$ eo maior erit, quo maior fuerit angulus AGL, indeque eo maior motus retardatio orietur.

Coroll. 3.

814. Maxima igitur accedet motus retardatio, ſi angulus AGL fiat rectus, tum enim non ſolum valor ipſius $\underline{uu}$ omnium fiet maximus, ſiquidem reſiſtentia lateralis multum ſuperet reſiſtentiam prorae. Sed etiam tum directio reſiſtentiae RM in motus directionem incidet, quo fit vt $s\sigma + r\varrho$ maximum valorem obtineat, fiatque $= 1$. Coroll.

Coroll. 4.

815. Cum radius curuedinis viae, in qua centrum grauitatis G incedet, ſit $= \frac{2V}{(r\sigma - s\rho)u^2}$, corpus a directione ſua impreſſa GL deflectet; atque dum elementum ſpatii $Gg = dx$ percurrit, deflectet angulo $= \frac{(r\sigma - s\rho)u^2 dx}{2V}$.

Coroll. 5.

816. Deflexio ergo a curſu rectilineo non pendet a celeritate corporis, ſed tantum a curſus obliquitate. A curſus enim obliquitate pendet tum valor ipſius uu, tum etiam $r\sigma - s\rho$, ſeu ſinus differentiae angulorum $\overline{M}RG$ et AGL.

Coroll. 6.

817. Si igitur angulus MRG aequalis fiat angulo AGL, tum deflectio a curſu rectilineo omnino erit nulla, corpuſque in linea recta progredi perget. At ſi angulus MRG maior fuerit angulo AGL; tum deflectet verſus A, atque viam curuilineam Gl deſcribet, inter GA et GL ſitam. Sin autem fuerit angulus AGL maior angulo MRG, tum in partem oppoſitam deflectet.

Coroll. 7.

818. Si centrum reſiſtentiae R incidat in ipſum grauitatis centrum G, tum vis gyratoria euaneſcit, hoc igitur caſu poſitio axis AB perpetuo manebit ſibi parallela. Vnde ſi angulus MRG ſeu HGB aequalis ſit angulo KGB, tum corpus non ſolum perget moueri in recta GL, ſed etiam eadem curſus obliquitas conſeruabitur.

Coro-

Coroll. 8.

819. Incidente autem R in G, ſeu quod perinde eſt, dummodo puncta G et R in eandem rectam verticalem cadant, ſi angulus MRG maior fuerit angulo AGL, tum curſus directio G*gl* accedet ad poſitionem axis AB tandemque abibit motus in curſum directum, eousque conſeruandum, quoad motus per reſiſtentiam omnis extinguatur. Sin autem angulus MRG minor ſit angulo AGL tum curſus continuo magis deflectet a directo, ita vt tandem eius directio fiat normalis ad AB.

Coroll. 9.

820. Si autem centrum reſiſtentiae R non in G ſed verſus proram A cadat, tum corpus inter mouendum conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum; atque axis BGA gyrabitur ſecundum plagam AF; quo fiet vt obliquitas curſus ſeu angulus AGL perpetuo creſcat.

Coroll. 10.

821. Sin autem centrum reſiſtentiae R vltra G verſus puppim B cadat, tum conuerſio fiet in regionem oppoſitam; vnde curſus obliquitas mox tolletur, atque axis nauis AB conuertetur in ipſam motus directionem GL; quod ſi euenerit curſus directus conſeruabitur.

Scholion 1.

822. Ex his etiam intelligitur, ſi nauis AB, quae ante curſu directo promouebatur, a vi externa ita conuertatur, vt eius ſpina AB angulum obliquum AGL cum mo-

Digitized by Google

motus directione conſtituat, cuiusmodi mutationes inde ſint oriturae. Praecipue enim reſpiciendum erit ad centrum reſiſtentiae R, angulo obliquitatis curſus praeſenti A G L reſpondens: quod ſi vltra centrum grauitatis G verſus proram fuerit collocatum, tum nauis ſeſe in priſtinum ſitum reſtituet, curſumque directum recuperabit. Contra vero ſi centrum reſiſtentiae R verſus proram cadat, tum nauis non ſolum in curſum directum ſe non recipiet, ſed etiam obliquitas curſus augebitur donec axis latitudinalis E F in curſus directionem incidat, quod ſi euenerit hoc ſitu in directum progredietur. Quocirca ſi centrum reſiſtentiae R in puppim cadat, curſus directus aliquam cenſendus eſt habere firmitatem, cum nauis ſi ex eo depellatur, eo ſponte ſe reſtituat; e contrario autem ſi centrum reſiſtentiae R verſus proram cadat, tum curſus directus quaſi erit infirmus, eo quod ſi nauis quam minime de curſu directo declinetur, obliquitas continuo maior euadit. Quamobrem curſus directus difficulter conſeruabitur, niſi habeat firmitatem, hoc eſt niſi centrum reſiſtentiae R verſus puppim cadat; minima enim vis ſufficeret ad curſum directum penitus deſtruendum. Interim tamen etiamſi centrum reſiſtentiae R in prora ſitum ſit, tamen curſus directus ope gubernaculi B *b* conſeruari poterit; eo maiore autem opus erit vi ad reſtitutionem in curſum directum, quo propius punctum R ad proram A ceciderit, ſimulque quo maior angulus G R M extiterit. Curſus autem obliquus ſub angulo A G L in directum conſeruari omnino nequit niſi centrum reſiſtentiae R in G cadat, atque angulus H G K euaneſcat. Nam ſi R cadat in proram, ne-

quidem ope gubernaculi motus rectilineus ſub eadem obliquitate conſeruari poteſt: quamuis enim gubernaculum in ſitum Bb deflexum motum conuerſionis nauis circa axem verticalem impedire queat, tamen per ipſam gubernaculi vim motus magis a via rectilinea GL declinabitur; Si quidem angulus MRG maior fuerit angulo AGL, prout id quidem in nauibus accidere debet. Quando autem centrum reſiſtentiae R in puppim cadit, tum fieri poteſt vt ope gubernaculi eadem obliquitas curſus, motusque rectilineus conſeruetur; id quod eueniet, ſi vis gubernaculi non ſolum motum gyratorium impediat, ſed etiam ſimul vim normalem deſtruat. Ex his omnibus perſpicuum eſt ad motum rectilineum ſub directione obliqua conſeruandum opus eſſe viribus externis inſigni cautione applicandis, qua quidem de re mox videbimus. Quo autem quovis caſu aeſtimari liceat, quomodo valores σ, ϱ et $\underline{u}\,\underline{u}$ vna cum interuallo $GR = z$ a data curſus obliquitate pendeant, exempla quaedam afferamus, in quibus iſti valores exhiberi poterunt.

Exemplum 1.

823. Sit primo figura AEBF compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ad communem chordam AB diſpoſitis, ſeu ſint nauis omnes ſectiones horizontales huic figurae aequales; et ponatur radius circuli cuius arcus AEB et AFB ſint portiones $= c$; atque cum centrum grauitatis G in medio chordae AB erit ſitum, ſit $AG = BG = a$; $EG = FG = b$, ita vt ſit $2bc = a^2 + b^2$; et ponatur breuitatis gratia $c - b$ ſeu $\surd(c^2 - a^2) = d$. Ex his cum propoſ. 58 comparatis prodibit interuallum $GR = z$ =

$= \frac{ra^3d}{c^3-rd^3}$ atque anguli GRM tangens $= \frac{\sigma}{\rho} = \frac{2sc^3-2rsd^3}{2rc^3-3rrc^2d+(rr-ss)d^3}$: tandemque vis reſiſtentiae $= \frac{2v}{3cc} \surd (4c^6 - 12r^2c^5d + 9r^4c^4d^2 + 4r(r^2-3ss)c^3d^3 - 6rr(r^2-s^2)c^2d^4 + d^6)$ quae vis reſiſtentiae, ſi curſus ſit directus, prodit $= \frac{2(c-d)^2(2c+d)v}{3cc}$. Si ergo ſit ff ſuperficies plana eandem patiens reſiſtentiam, quam patitur corpus in curſu directo erit $\frac{uu}{ff} = \frac{\surd(4c^6-12r^2c^5d+9r^4c^4d^2+4r(r^2-3s^2)c^3d^3-6rr(r^2-s^2)c^2d^4+d^6)}{(c-d)^2(2c+d)}$. Si fuerit obliquitas valde parua vt s prae r euaneſcat fiet $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{2s(c^3-d^3)}{2c^3-3c^2d+d^3} = \frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(2c+d)}$, vnde erit $\rho = 1$ et $\sigma = \frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(u+d)} = \frac{a^2s}{b^2}$; et $z = \frac{a^3d}{c^3-d^3} = \frac{ab^2(a^2-b^2)}{a^4+3b^4}$. Ex quibus ponendo angulo AGL infinite paruo prodibit $s\sigma + r\rho = 1$ et $r\sigma - s\rho = \sigma - s = \frac{s(a^2-b^2)}{b^2}$ atque $u^2 = f^2$. Quibus ſubſtitutis habebitur $dv = -ffv\,dx$, et radius curuedinis curuae deſcriptae $= \frac{2bbV}{(a^2-b^2)ffs}$. atque momentum vis corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertens $= \frac{a^2(a^2-b^2)Mffsv}{(a^4+3b^4)V}$.

Coroll. 1.

824. Vis igitur gyratoria ſeu obliquitatem curſus adaugens eo erit maior, quo magis longitudo nauis excedit latitudinem. Atque ſimul eo maior erit curuatura viae, in qua corporis centrum grauitatis incedet.

Coroll. 2.

825. Patet etiam quo magis longitudo AB ſuperet latitudinem EF, eo magis fore exceſſum anguli GRM ſupra angulum AGL. Namque angulus GRM ſe habet ad angulum AGL in duplicata ratione longitudinis ad latitudinem nauis.

 Co-

Coroll. 3.

826. Si ergo latitudo EF aequalis fiat longitudini AB, ſeu $b = a$, quo caſu figura abibit in integrum circulum, tum erit $c = a$ et $d = 0$; vnde centrum reſiſtentiae in G cadet atque fiet $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s}{r}$, quamobrem curſus inceptus ſine vlla mutatione continuabitur; id quod etiam eo patet, quod in circulo non detur curſus obliquitas.

Exemplum 2.

827. Sit figura nauis, praeterquam quod habeat planum diametrale AB id quod ſemper ponimus, ita comparata vt centrum reſiſtentiae R perpetuo cadat in rectam verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem. Deinde ſi ponatur reſiſtentia, quam patitur corpus curſu directo in directione GA motum, tanta, quantam pateretur figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota atque reſiſtentia lateralis, quam ſufferet, ſi in directione GE moueretur, tanta, quantam pateretur figura plana bb eadem celeritate in aquam impingens; habeat motus obliquus hanc proprietatem vt ſit tangens anguli HGB $= \frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$; ſeu anguli MRB ſiue HGB tangens teneat ad tangentem anguli obliquitatis curſus AGL rationem vt bb ad ff hoc eſt vt reſiſtentia lateralis ad reſiſtentiam prorae. Vis denique reſiſtentiae ſit $= v\sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}$, in directione GH corpus vrgens; ita vt ſit pro oblata obliquitate curſus $uu = \sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}$. His igitur poſitis nulla omnino erit vis tendens ad corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertendum et hancobrem poſitio axis nauis AB perpetuo in motu ma-

manebit eadem ſeu ſibi parallela. Poſtmodum autem cum ſit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$, erit $\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}{rff}$ ideoque $\sigma = \frac{sbb}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ et $\rho = \frac{rff}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$; vnde fiet $s\sigma + r\rho = \frac{s^2b^2+r^2f^2}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ et $r\sigma - s\rho = \frac{rs(bb-ff)}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$: ex quibus elicitur primo retardatio motus $dv = -\frac{(s^2b^2+r^2f^2)vdx}{V}$ atque declinatio a ſemita rectilinea tanta erit vt arculum circularem Gg deſcribat corpus cuius radius erit $= \frac{2V}{rs(bb-ff)}$.

Coroll. 1.

828. Cum anguli HGK ſinus ſit $= \frac{rs(bb-ff)}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ patet ſi fuerit $b > f$ tum ſemper angulum MRG ſeu HGB fore maiorem angulo AGL praeter duos caſus quibus eſt vel s vel $r = 0$, hoc eſt ſi declinatio curſus AGL fuerit vel nulla vel 90 graduum.

Coroll. 2.

829. Ex hac igitur formula intelligitur fore alicubi differentiam inter angulos HGR et AGL maximam; qui locus ibi erit, ſi fuerit tangens anguli AGL $= \frac{f}{b}$, ſeu $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$; tum autem auguli HGB ſeu MRG tangens erit $= \frac{b}{f}$.

Coroll. 3.

830. Quoniam autem hic nulla adeſt vis corpus convertens, ideoque axis AB eandem poſitionem perpetuo retinet, curſus directio GL a vi normali continuo verſus AB inflectetur ita vt tandem curſus in directum mutetur.

Coroll. 4.

831. Eo magis autem motus centri grauitatis a linea recta deflectetur, quo maior fuerit differentia inter reſiſtentiam prorae et reſiſtentiam lateris, hoc eſt quo minorem nauis in curſu directo ſecundum directionem B A patiatur reſiſtentiam, ſimulque quo maior fuerit reſiſtentia quam pateretur in directione F E mota.

Scholion 2.

832. Non ſine graui ratione caſum hunc attulimus, videtur enim haec proprietas, quam corpori in aqua oblique promoto hic tribuimus, maxime competere in naues, quae vento propelli ſolent. Primo enim in huius generis nauibus ad id imprimis attenditur, vt centrum reſiſtentiae ex prora verſus puppim remoueatur, et quaſi in ipſam rectam verticalem per centrum grauitatis ductam incidat. Deinde reſiſtentia lateralis vehementer excedere ſolet reſiſtentiam curſus directi, ex quo ſponte ſequitur, quod ſupra iam annotauimus, in curſu obliquo directionem reſiſtentiae multo magis ab axe nauis declinare. Idem autem ſatis commode formula aſſumta declarat, per quam angulo obliquitatis curſus cuius tangens eſt $= \frac{s}{r}$ reſpondet angulus, quem media directio reſiſtentiae cum ſpina nauis conſtituit, cuius tangens eſt $= \frac{s}{r} \cdot \frac{bb}{ff}$ qui angulus ergo euaneſcit, ſi obliquitas euaneſcit, atque in rectum abit, ſi nauis directio ad ſpinam ſit normalis, quae apprime conueniunt cum figura nauium recepta. Tertio quod poſuimus vim reſiſtentiae eſſe $= \sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}$ id quidem mirifice in ſtructuram nauium receptam quadrat; facto enim $s = 0$, et $r = 1$, qui eſt caſus curſus directi, reſiſtentia fit $= ff$ vti aſſumſimus, ſimilique modo ſi obli-

liquitas curſus ad angulum rectum declinet egregie prodit reſiſtentia $=bb$. Praeterea vero patet ſi reſiſtentia lateralis bb reſiſtentiae prorae ff aequalis ponatur, tum omnium curſuum reſiſtentiam fore quoque eandem; ac tandem iſta expreſſio reſiſtentiae ita eſt comparata, vt cum angulo M R B cuius tangens eſt $\frac{sbb}{rff}$ apprime conſpiret, ſiquidem cum caſibus ſupra tractatis conferatur. At harum proprietatum probatio ſi non apodictica tamen eiusmodi, in qua acquiescere liceat, afferri poteſt, qua euincetur hanc tum directionis reſiſtentiae tum quantitatis rationem in nauibus locum inuenire. Reſoluatur ſcilicet motus ſecundum directionem obliquam G L factus in duos laterales; quorum alter fiat in directione G A cuius celeritas erit $=r\sqrt{v}$, alter vero in directione G E ad iſtam normali, cuius celeritas erit $=s\sqrt{v}$. Iam quamuis in calculo reſiſtentiarum non liceat motum decomponere tamen pro noſtro inſtituto parum a veritate aberrabitur, ſi corpus duplici motu altero in directione G A cum celeritate $r\sqrt{v}$, altero in directione G E cum celeritate $s\sqrt{v}$ ferri ponamus. Propter illum autem motum reſiſtentia quam patietur prora cenſeri poteſt ſe habere ad reſiſtentiam quam latus perferet vt rff ad sbb, vnde directio media reſiſtentiae G H angulum H G B conſtituet cuius tangens erit $=\frac{sbb}{rff}$, atque ipſius reſiſtentiae quantitas fiet $=v\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}$ ſeu planum reſiſtentiam exprimens erit $uu=\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}$. Ex hac conſideratione noua hypotheſis formari poterit ponendo reſiſtentiam prorae non vt hic fecimus $=rff$, ſed tantam, quanta foret ſi actu tanta celeritate promoueretur, ſcilicet $=r^2f^2$, ſimilique modo reſiſtentiam lateris $=s^2b^2$, vnde

Digitized by Google

de fiet anguli HGB tangens $= \frac{s^2 b^2}{r^2 f^2}$, atque ipſa vis reſiſtentiae $= v\sqrt{(s^4 b^4 + r^4 f^4)}$ ſed haec altera hypotheſis quam prior plus a veritate recedit, ſi figura ponatur circulus. Nam hoc caſu ſemper fit anguli HGB tangens $= \frac{s}{r}$, atque reſiſtentia eſt conſtans ſeu $uu = ff = bb$; id quod indicat prior hypotheſis, poſterior autem ſecus. Quamobrem priorem hypotheſin poſteriori merito praeferre conuenit, ideoque eam in ſequentibus prae aliis conſiderabimus. Eo minus autem prior illa hypotheſis a veritate aberrabit, ſi reuera naues ita fuerint comparatae, vt ſemper quemcunque curſum obliquum teneant, centrum reſiſtentiae in ipſum nauis centrum grauitatis cadat; quoniam enim hoc ipſum hypotheſis poſtulat, dubium non eſt, quin ſi naues in hoc conuenerint, reliqua eo minus ſint erratura.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XXXVI fig. 1.

833. *Determinare vim venti et diſpoſititionem velorum quibus efficiatur vt nauis motu rectilineo ſub data curſus obliquitate vniformiter progrediatur; ſimulque velocitatem motus definire.*

Solutio.

Repraeſentet AEBF figuram nauis, in qua ſit G centrum grauitatis nauis, atque recta AB poſitio ſpinae ſeu axis longitudinalis a prora A ad puppim B ducti. Promoueatur autem centrum grauitatis G motu vniformi in directum per GL ſitque altitudo ipſius celeritati debita $= v$. Exhibet igitur angulus AGL curſus obliquitatem cuius ſinus ſit $= s$ coſinusque $= r$; quare cum nauis hanc obliquitatem conſtanter retinere ponatur, reſiſtentia quoque

per-

perpetuo manebit eadem eiusque directio erit RM, quae cum AB angulum MRB conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$ et coſinus $= \varrho$, reſiſtentia vero ipſa tanta ſit, quantam pateretur figura plana $\underline{u}\,\underline{u}$ planitie ſua directe contra aquam eadem celeritate $V^2 v$ impingens; quae omnia dabuntur ex data nauis ſtructura et data obliquitate, ita vt σ, ϱ et u^2 abr, s et quantitatibus per nauem datis pendeant. Hinc erit vis reſiſtentiae in directione RM vrgens $= uuv$, ſeu poſito nauis pondere $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V, aequabitur vis reſiſtentiae ponderi $\frac{Mu^2v}{V}$. Cum igitur haec vis non ſolum motum retardet, ſed etiam directionem et curſus obliquitatem mutet, eam per vim venti deſtrui oportebit. Hoc enim ſi fuerit praeſtitum, perſpicuum eſt ceſſante cauſa motum perturbante, nauem celeritatem ſuam Vv retinere, eaque vniformiter in directum incedere atque inſuper obliquitatem ſuam immutatam conſeruare debere. Aliter autem haec vis reſiſtentiae prorſus deſtrui non poteſt, niſi directio vis venti incidat in directionem reſiſtentiae RM, atque ſimul vis venti aequalis ſit et contraria vi reſiſtentiae. Cum igitur vis venti ad vela ſit normalis, oportet vt ſuperficies velorum ad rectam RM ſit normalis, atque centrum grauitatis commune velorum in eandem verticalem cum centro reſiſtentiae R cadat, ſiquidem vela ſemper centrum ſuum grauitatis in axe AB habent poſitum, ſit itaque $\underline{e}\,\underline{f}$ velorum directio, quae ſit normalis ad MR, atque venti vis tanta eſſe debebit vt aequet vim reſiſtentiae $\frac{Mu^2v}{V}$. Ponatur autem ſuperficies velorum plana $= gg$, atque ventus flet in directione VR celeritate Vc, ſitque anguli VvC ſinus $= \mu$ et coſinus $= \nu$. Ad vim venti vero

cognoſcendam, definiendi ſunt ſinus angulorum VRf et C rf, quorum ille ſi fuerit $= m$ hic vero $= q$ erit vis venti in directione RN vrgens $= (m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg$ (794) ſeu aequalis erit ponderi $\frac{M(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2 gg}{794 V}$. At eſt ſin. C$rf$ $=$ coſ. R nr $=$ coſ. (MRG$-$AGL) et coſ. C$rf = -$ ſin. R$nr = -$ ſin. (MRG $-$ AGL; vnde prodit anguli C rf ſinus $q = s\sigma + r\varrho$ et coſinus $= s\varrho - \sigma r$. Deinde cum ſit ſin. VRf $=$ ſin. (Crf $+$ CvV) erit $\underline{m} = v(s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$; ideoque vis venti $= \frac{M(v(s\sigma+r\varrho)\sqrt{c}-\mu(r\sigma-s\varrho)\sqrt{c}-(s\sigma+r\varrho)\sqrt{v})^2 g^2}{794 V}$ cuius directio iam eſt contraria directioni reſiſtentiae RM, ſupereſt ergo tantum vt ipſa vis fiat aequalis vi reſiſtentiae $\frac{Mu^2 v}{V}$ vnde obtinebitur iſta aequatio $28 u\sqrt{v} = v(s\sigma + r\varrho) g\sqrt{c} - \mu(r\sigma - s\varrho) g\sqrt{c} - (s\sigma + r\varrho) g\sqrt{v}$ ex qua aequatione vel celeritas venti $\sqrt{c}$ vel celeritas nauis $\sqrt{v}$ determinari poterit, ſi igitur ponamus velocitatem venti datam, reperietur celeritas, qua nauis ſub data obliquitate curſus AGL in data linea recta GL mouebitur $= \sqrt{v} = \frac{(v(s\sigma+r\varrho)-\mu(r\sigma-s\varrho))g\sqrt{c}}{28u+(s\sigma+r\varrho)g}$. Oportet autem vt ſit $\underline{m}$ ſeu eius valor $v(s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$ ſit affirmatiuus, nam ſi fieret negatiuus, ventus vela non in directionem RN ſed oppoſitam RM intenderet; quamobrem hi caſus probe ſunt excipiendi. Idem quidem ipſa expreſſio inuenta luculenter declarat, cum ſi $\underline{m}$ obtineat valorem negatiuum, quoque celeritas $\sqrt{v}$ fiat negatiua, quod indicio eſt tum nauem non in directione GL ſed contraria GC eſſe inceſſuram. Q. E. I.

Coroll. 1.

834. Si anguli RnG, qui eſt exceſſus anguli M RB ſupra angulum AGL, ſinus ponatur $= p$ et coſinus $= q$ erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, vnde reperietur celeritas nauis $\sqrt{v} = \frac{(vq-\mu p)g\sqrt{c}}{28u+qg}$.

Co-

Coroll. 2.

835. At $vq-\mu p$ exprimit coſinum ſummae angulorum, quorum ſinus ſunt p et μ. Quare ne iſte coſinus vti requiritur fiat negatiuus, oportet vt ſumma angulorum $VvC+Rnv$ minor ſit angulo recto.

Coroll. 3

836. Si ergo dentur venti directio VR, via deſcribenda GL et obliquitas curſus AGL a qua velorum poſitio pendet, celeritas nauis eo maior erit, quo maior fuerit celeritas venti idque in eadem ratione.

Coroll. 4.

837. Si centrum reſiſtentiae R locum habeat variabilem, pro variis curſus obliquitatibus, tum centrum grauitatis velorum debebit quoque mutari, quoniam vis venti vnico modo vim reſiſtentiae deſtruere poteſt.

Scholion 1.

838. Niſi igitur centrum reſiſtentiae R pro omnibus obliquitatibus curſus fixum teneat locum vnicus malus nullum praeſtabit vſum in variis curſibus obliquis conſeruandus. Sin autem nauis pluribus malis fuerit inſtructa, tum vtique vela ita attemperari poterunt, vt eorum commune centrum grauitatis verticaliter puncto R quouis caſu immineat; ſed hoc caſu pro quolibet obliquitatis curſu neceſſe foret locum centri reſiſtentiae R exactiſſime noſſe, id quod in praxi vix ſperari poteſt. Tentando autem difficillimum foret vela malorum ita moderari, vt deſidera-

tum effectum praeſtarent, cum duabus conditionibus perfecte ſatisfieri debeat. Primo enim ea reſiſtentiae vis deſtrui debet, quae nauem de curſu rectilineo declinare conatur, haecque eſt vis normalis ad ſemitam GL ex reſolutione vis reſiſtentiae orta; haec igitur vis infinitis modis per ventum deſtrui poteſt, dummodo vis normalis ad ſemitam GL ex reſolutione vis venti orta illi ſit aequalis et contraria, neque ad hoc refert, in quo loco axis AB ea ſit applicata. Deinde vero vis reſiſtentiae etiam quae tendit ad nauem circa axem verticalem per centrum gravitatis tranſeuntem conuertendam eſt deſtruenda, quare momentum vis venti reſpectu huius axis aequale et contrarium eſſe debebit momento vis reſiſtentiae reſpectu eiusdem axis cui conditioni iterum innumeris modis ſatisfieri poteſt. At quo vtraque vis reſiſtentiae deſtruatur vnicus datur modus, quem proin tentando deprehendere quouis caſu vix eſt ſperandum. Hancobcauſam vtiliſſimum erit naues ita conſtruere, vt centrum reſiſtentiae in iis fixum teneat locum, atque adeo in centrum grauitatis incidat, tum enim, cum vis reſiſtentiae nauem conuertens ſit nulla, ſatis facile erit alteram vim deſtruere.

Scholion 2.

839. Poſuimus in ſolutione huius problematis proram A in partem viae CL contrariam cadere ei, ex qua ventus V venit, ſimilis autem euadet ſolutio, ſi prora in eandem plagam declinet a recta GL, cuiusmodi caſus in figura hic allegata eſt repraeſentatus. Si enim vt ante fuerit anguli declinationis curſus AGL ſinus $= s$ coſinus $= r$, anguli

Tab. XXXIV. fig. 2.

vero

Digitized by Google

vero MRB, quem media directio reſiſtentiae cum axe nauis conſtituit, ſinus $= \sigma$ et coſinus $= \varrho$; vela $e\ f$ ita expandi debebunt vt ſint normales ad RM. Sit porro vt ante planities velorum $= gg$, et venti celeritas $= \sqrt{c}$, atque anguli VvC quem directio venti cum via deſcribenda CL conſtituit ſinus $= \mu$, coſinusque $= \nu$; ac tandem ſuperficies plana uu exprimat vim reſiſtentiae abſolutam. Manifeſtum eſt priorem caſum ad hunc reduci, ſi fiant s et σ negatiua, quoniam anguli AGL et MRB in contrarias partes cadunt. Hinc igitur prodibit celeritas, qua nauis vniformiter in directione GL progredi poterit, $= \frac{(\nu(s\sigma+r\rho)+\mu(r\sigma-s\rho))g\sqrt{c}}{2uu+(s\sigma+r\rho)g}$ quae eadem expreſſio prodiiſſet ſi tantum μ poſitum fuiſſet negatiuum. Si ergo anguli GnR qui eſt exceſſus anguli MRB ſupra AGL, ſinus ponatur p et coſinus $= q$, erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, atque celeritas nauis ad motum vniformem in directum conſeruandum prodibit $= \frac{(\nu q+\mu p)g\sqrt{c}}{2uu+qg}$, quae a ſuperiore forma hoc tantum diſcrepat, quod ſinus anguli VvC, qui eſt $= \mu$ negatiue ſit ſumtus.

Coroll. 1.

840. Quoniam ſinus anguli VRf, qui eſt $= \nu q + \mu p$ ſemper debet eſſe affirmatiuus, debebit eſſe $\nu q + \mu p > 0$, at $\nu q + \mu p$ eſt coſinus differentiae angulorum VvC et RnC quare horum angulorum differentia debet eſſe recto minor.

Coroll. 2.

841. Angulus ergo VvC poterit eſſe recto maior, dummodo rectum minore angulo excedat, quam eſt an-

gulus RnC. Quamobrem ſi angulus MRB maior fuerit quam angulus AGL, curſus adeo ita inſtitui poterit vt angulum VvL cum plaga e qua ventus venit acutum conſtituat.

Coroll. 3.

842. Maxime igitur adverſus ventum licebit curſum nauis inſtituere, ſi naui ea obliquitas curſus tribuatur, in qua angulus MRB maxime ſuperat angulum AGL.

Coroll. 4.

843. Quoniam autem, quo magis curſus aduerſus ventum dirigitur, expreſſio $\nu q + \mu p$ eo fit minor, manifeſtum eſt quo magis nauis aduerſus ventum propellatur, eo tardiorem fore eius motum; indeque lucrum non augeri. Dabitur ergo eiusmodi diſpoſitio, qua maxime in uenti regionem curri poterit.

Exemplum 1.

Tab. XXXIV. fig. 1. 844. Habeat nauis eam proprietatem, quam ſupra recepimus, vt centrum reſiſtentiae R in ipſum nauis centrum grauitatis G incidat, atque ſi reſiſtentiae in curſu directo tanta ſit quanta figurae planae ff reſiſtentia eadem celeritate contra aquam impingentis, reſiſtentia vero in curſu obliquo maximo, cuius obliquitas ſit 90 grad. ſimili modo reducta ſit ad planum bb; tum vero ſit anguli MRB tangens $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$ ſeu $\sigma = \frac{sbb}{\sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}}$ et $\varrho = \frac{rff}{\sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}}$; atque reſiſtentia in hoc curſu obliquo, ſeu uu ſit $= \sqrt{}$ $(s^2 b^4 + r^2 f^4)$, vnde fit $u = \sqrt[4]{}\ (s^2 b^2 + r^2 f^4)$. His poſi-

poſitis erit $p = r\sigma - s\varrho = \frac{rs(b^2-f^2)}{\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}}$ et $q = s\sigma + r\varrho = \frac{s^2b^2+r^2f^2}{\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}}$, ex quibus reperitur celeritas huius nauis, qua vniformiter in directione GL incedere poterit ſeu $Vv = \frac{(\nu(s^2b^2+r^2f^2)-(\mu rs(b^2-f^2))g\sqrt{c}}{2\nu\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$. At ſi prora A dirigatur in eam Tab. XXXIV. fig. 2. regionem rectae CL ex qua ventus venit, tum manentibus omnibus vt ante, erit tantum μ in negatiuum transmutato celeritas nauis progreſſiua $= \frac{(\nu(s^2b^2+r^2f^2)+\mu rs(b^2-f^2))g\sqrt{c}}{2\nu\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$.

Coroll. 1.

845. Maiorem igitur nauis obtinebit celeritatem, ſi vt in caſu poſteriore axis nauis AB ita inclinetur vt prora A in eam plagam collocetur, ex qua ventus venit, ceteris paribus ſcilicet manente eadem curſus obliquitate.

Coroll. 2.

846. Anteferendi igitur ſunt illi curſus in quibus prora A ſupra viam GL cadit, iis quibus prora A infra GL cadit: quia non ſolum iſtae obliquitates cum maiore celeritate ſunt connexae ſed etiam multo plures obliquitates locum inueniunt.

Coroll. 3.

847. Poſita autem obliquitate curſus deorſum ſpectante vt in priore caſu, limites omnium curſuum erunt $s = 0$ et haec aequatio $\nu s^2b^2 + \nu r^2f^2 = \mu rs(bb-ff)$ ex qua anguli obliquitatis curſus tangens fit $= \frac{\mu(b^2-f^2) \pm \sqrt{(\mu^2(b^2-f^2)^2 - 4\nu^2f^2b^2)}}{2\nu b^2}$ vnde bis angulus VRf euaneſcit.

Coroll. 4.

848. Caſu autem altero, quo prora A ſupra CL con-

conuertitur omnes obliquitatis curſus gradus continentur inter hos limites, quorum alterum conſtituit obliquitatis tangens $=0$, alterum quo iſta tangens aequatur $-\frac{\mu(b^2-f^2)\pm\surd(\mu^2(b^2-f^2)^2-4\nu^2f^2b^2)}{2\nu b^2}$ vbi ſignum $-$ limitem prioris caſus praebet; ita vt ſuperius ſignum $+$ tantum pro hoc caſu valeat.

Coroll. 5.

849. Quod autem manentibus ceteris ad directionem venti attinet, manifeſtum eſt generaliter eum ventum celerrime nauem propellere cuius directio ad planitiem velorum ſit normalis. Celeritas enim ceteris paribus eſt directe vt ſinus anguli, quem directio venti cum velis conſtituit.

Coroll. 6.

850. Si vela in infinitum augerentur tum prodiret celeritas nauis $=\nu\surd c\mp\frac{\mu rs(b^2-f^2)}{s^2b^2+r^2f^2}\surd c$ ex quo nauis maximam obtinebit celeritatem ſi anguli obliquitatis curſus fiat $=\frac{f}{b}$; niſi angulus Vv C fuerit vehementer exiguus.

Coroll. 7.

851. Sin autem quaereretur curſus obliquitas, qua nauis a dato vento propulſa in data directione celerrime promoueatur, aequatio reperitur vehementer perplexa, vt nil inde concludi queat; quae autem facto g infinito praebet $\frac{s}{r}=\frac{f}{b}$. Ipſa autem aequatio generaliter determinans angulum AGL eſt ſequens pro caſu priore, prora ſupra CL ſita $\mu g(r^2f^2-s^2b^2)\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)}=\begin{matrix}+\mu s^4\\+\mu r^2s^2\\+\nu rs^3\end{matrix}b^4-3\nu rs f^2b^2\begin{matrix}-2\mu r^4\\-\mu r^2s^2\\+\nu r^3s\end{matrix}f^4$.

Coroll.

Coroll. 8.

852. Si venti directio Vv congruat cum directione motus praeſcripta CL, erit $\mu = 0$, et $\nu = 1$ vnde prodit $rs(s^2b^4 - 3f^2b^2 + r^2f^4) = 0$; quae tres caſus continet primo $s = 0$, quo curſus obliquitas euaneſcit motusque fit celerrimus, ſecundo $r = 0$, quo nauis in latus promouetur, motusque fit tardiſſimus, tertio denique fit $s^2 = \frac{ff(3bb-ff)}{b^4-f^4}$ et $s = \frac{f\sqrt{(3b^2-f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4)}}$ atque $r = \frac{b\sqrt{(b^2-3f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4)}}$ quo caſu fit celeritas $= \frac{g\sqrt{c}}{\frac{7(ff+3bb)}{\sqrt{fb}}\sqrt[4]{27+g}}$, quae eſt omnium minima, ſi quidem ſit $b^2 > 3ff$.

Exemplum 2.

853. Habeat nauis alteram proprietatem ſupra memoratam (832) vt centrum Reſiſtentiae R in nauis centrum grauitatis G incidat, atque ſi vt ante reſiſtentia prorae et lateris exprimatur figuris planis ff et bb, vt ſit anguli MRB tangens $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$ ſeu $\sigma = \frac{s^2b^2}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$ et $\rho = \frac{r^2f^2}{\sqrt{s^4(b^4+r^4f^4)}}$, atque reſiſtentia in hoc curſu ſeu $\underline{uu}$ ſit $= \sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}$, vnde erit $u = \sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)}$. His poſitis habebitur $p = r\sigma - s\rho = \frac{sr(sb^2-rf^2)}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$, et $q = s\sigma + r\rho = \frac{s^3b^2+r^3f^2}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$: ex quibus reperitur celeritas nauis, qua in directione G L aequabiliter progredietur $= \frac{(\nu(s^3b^2+r^3f^2)-\mu(s^2rb^2-sr^2f^2))g\sqrt{c}}{2a\sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)^3}+(s^3b^2+r^3f^2)g}$. At ſi prora A dirigatur in alteram partem rectae CL, haec eadem expreſſio valebit praeterquam quod loco μ ſcribi debeat $-\mu$.

Tab. XXXIV Fig. 1.

Scholion 3.

854. Inſigne atque maxime vtile problema hic occurrit, quo ex datis directione venti VR et via a naui deſcribenda CGL ſeu ex dato angulo CvV definienda eſt curſus obliquitas ſeu angulus AGL, quo fiat vt nauis celerrime promoueatur. Problema quidem hoc iam reſoluimus pro exemplo ſecundo (851); verum ad eiusmodi aequationem pertigimus, ex qua obliquitas deſiderata difficillime erui poteſt, neque etiam approximationibus vti licet cum aequatio ad rationalitatem reducta fiat ſedecim dimenſionum. Maior autem difficultas oriretur, ſi idem problema pro exemplo ſecundo tentare vellemus. Interim tamen rem generaliter conſiderando quodammodo curſus
Tab. XXXIV fig. 2. maxime lucroſus aeſtimari poterit. Cum enim celeritas inventa ſit $= \frac{(\nu q+\mu p)gVc}{2uu+qg}$ in qua expreſſione μ eſt ſinus et ν coſinus anguli dati VvC, p vero et q ſinus et coſinus anguli RnG qui ab angulo quaeſito AGL pendet; uu autem exprimit reſiſtentiam, quam nauis curſu obliquo perfert, quo adeo etiam a p et q pendet. Quamobrem cum nexus inter u et p non conſtat, per methodum maximorum et minimorum valor ipſius p vel q definiri non poterit, quo celeritas nauis fiat maxima. At quoniam numerator expreſſionis iſtius ſcilicet $\nu q+\mu p$ praebet ſinum anguli VRf, quem directio venti VR cum planitie velorum ef conſtituit, manifeſtum eſt hunc numeratorem non mutari, ſi poſitio velorum ef ita immutetur vt angulus VRf fiat obtuſus, deinceps poſito angulo priori VRf hoc eſt, ſi obliquitas curſus ita ſumatur, vt media directio reſiſtentiae RM intra angulum VvC cadat quem caſum

Digitized by Google

caſum in figura citata expreſſimus in qua vt ante VR eſt directio venti, RM media directio reſiſtentiae intra Vv et Cn poſita. Cum igitur hoc caſu ſinus anguli VRf cum praecedente congruat, ideoque numerator fractionis velocitatem nauis exprimentis ſit idem, denominator ſpectari debet, qui eſt $28u + qg$, de quo primum patet u minorem habere quantitatem quam caſu praecedente, quoniam curſus hic minus eſt obliquus, atque reſiſtentia augetur, quo magis obliquitas creſcit. Altera vero denominatoris pars qg in qua q, eſt coſinus anguli GnR, vel creſcere poteſt vel decreſcere, vel etiam eadem manere. Si enim obliquitas eſt valde parua tum quidem angulus GnR fit perquam exiguus, ideoque q, fere ſinui toti aequatur, at vero quoque, ſi obliquitas vehementer fit magna, tum pariter angulus GnR decreſcit, obliquitate enim ad 90 gradus aucta, media directio reſiſtentiae iterum in directionem curſus incidit. Quocirca iſta curſus mutatione, cum q aeque augeri ac dimininui potuerit, ex altera parte $28u$, quae certe minor eſt facta concludendum eſt iſtam curſus diſpoſitionem antecedenti eſſe praeferendam eaque nauem celerius promoueri. His igitur praenotatis videamus, quomodo per approximationem curſus maxime velox definiri queat, ſi quidem datae fuerint venti directio VR et via abſoluenda GL ſeu angulus VvC cuius ſinus eſt μ et coſinus ν. Tab. XXXIII fig. 2.

PROPOSITIO 81.
Problema.

855. *Si data fuerit venti directio* VR *atque itineris conficiendi via* GL, *determinare curſus obliquitatem* AGL, *qua navis maxima celeritate promoueatur.* Tab. XXXIII. fig. 2.

 Solutio

Digitized by Google

Solutio.

Sit anguli $V v C$, qui eſt datus, ſinus $=\mu$ coſinus $=\nu$, curſus autem obliquitatis AGL ſinus $=s$ et coſinus $=r$; quos definire oportet, vt prodeat celeritas nauis maxima. At celeritas nauis, quam ſub hac curſus obliquitate habebit eſt $=\frac{(\nu q+\mu p)g\sqrt{c}}{2s u+qg}$; in qua expreſſione p et q ſunt ſinus et coſinus anguli RnG, qui eſt exceſſus anguli MRB ſuper angulum AGL. Primo autem notandum eſt hunc angulum RnG, ab initio creſcente obliquitate creſcere, at ad certum tantum terminum augeri, quem cum attigerit, ſi obliquitas curſus magis augeatur, iterum diminui, reſiſtentiam vero ſeu quantitatem u continuo augeri, quamdiu obliquitas creſcat. Ponamus igitur eum aſſumtum eſſe curſum obliquum AGL cui maximus angulus RnG reſpondeat; manifeſtum eſt, ſi obliquitas aliquantillum vel augeatur vel diminuatur angulum RnG quantitatem ſuam conſeruare, et proinde p et q non mutari. Hinc ergo perſpicuum eſt ſi angulus AGL magis augeatur, tum ob creſcentem u velocitatem nauis diminui, contra vero augeri, ſi obliquitas curſus AGL diminuatur. Ex quo ſatis luculenter ſequitur ad motum celerrimum obtinendum angulum AGL minorem accipi debere eo, cui angulus RnG maximus reſpondet. Sit igitur hic angulus AGL minor ſeu talis, quo creſcente angulus RnG creſcat; ponamusque angulum AGL aliquantillum augeri, ita vt eius ſinus s creſcat particula ds; augebitur igitur etiam anguli RnG ſinus p aliqua particula, quae ſit $=m\,ds$; coſinus vero q decreſcet particula $\frac{mp\,ds}{q}$; reſiſtentia vero ita creſcat vt u augeatur particula $a\,ds$ eritque ideo $dp=m\,ds$; $dq=-\frac{mp\,ds}{q}$ et d

$u=$

$u = nds$. Ex his autem prodibit celeritatis quae eſt $= \frac{(\nu q + \mu p) g \sqrt{c}}{2\delta u + qg}$ augmentum $= \frac{(\mu g m + 2\delta(nu(\mu q - \nu p) - 2\delta n q(\mu p + \nu q))) g d s \sqrt{c}}{q(2\delta u + qg)^2}$. Cuius fractionis numerator ſi fuerit affirmatiuus, tum nauis aucta obliquitate curſus vti poſuimus reale accipiet augmentum, at ſi numerator fuerit negatiuus tum celeritas decreſcet. At eſt $\mu q - \nu p$ ſinus anguli V R M et $\mu p + \nu q$ eiusdem anguli coſinus. Quare ſi ponatur anguli V R M ſinus $= x$ et coſinus $= y$, aucta curſus obliquitate nauis celerius progredietur ſi fuerit $\mu g m + 2\delta m u x - 2\delta n q y > 0$ tardius autem ſi fuerit $\mu g m + 2\delta m u x - 2\delta n q y < 0$. Hancobrem quo nauis celerrime progrediatur, oportet curſum ita inſtitui, vt ſit $\frac{\mu g m}{2\delta} = nqy - mux$. Ex qua reperitur angulum VRM differentiam eſſe debere duorum angulorum, quorum maioris ſinus ſit $= \frac{nq}{\sqrt{(n^2 q^2 + m^2 u^2)}}$, minoris vero ſinus $= \frac{\mu g m}{2\delta \sqrt{(n^2 q^2 + m^2 u^2)}}$. Sunt autem omnes quantitates quae hic occurrunt, affirmatiuae, vnde non difficile erit obliquitatem curſus aeſtimare quouis caſu oblato. At commodiſſime negotium conficietur, ſi pro quouis caſu angulus quicunque inter limites aſſignatos accipiatur, atque inquiratur, vtrum eo aliquantillum aucto celeritas augeatur, an diminuatur, ex quo ſtatim colligetur, vtrum obliquitas deſiderata excedat aſſumtam, an ea ſit minor Q. E. I.

Coroll. 1.

856. Si aſſumatur primum obliquitas nulla ſeu curſus ponatur directus, erit $p = 0$ et $q = 1$ atque $u = f$, ſiquidem planum ff exprimat reſiſtentiam curſus directi; celeritasque corporis erit $= \frac{\nu g \sqrt{c}}{2\delta f + g}$ ſi nunc obliquitas infinite

te parua conſtituatur erit $du = nds = 0$, atque manente $dp = mds$, erit celeritatis incrementum $= \frac{(\mu g m + 28 \mu m f)\rho ds \sqrt{c}}{(28 f + g)^2}$.

Coroll. 2.

857. Apparet igitur niſi ſit $\mu = 0$ ſeu niſi ventus a puppi veniat, curſum directum non celerrimum producere motum, ſed curſum quendam obliquum eſſe praeſerendum. Excepto tamen eo caſu quo $\frac{dp}{ds}$ in curſu directo euaneſcit, quippe quo curſus directus ſemper habet maximum minimumue ſed non ſemper eius modi quale hic deſideratur.

Coroll. 3.

858. Euaneſcat in curſu directo $\frac{dp}{ds}$, vt m et n ſint quantitates infinite paruae; atque curſus directus celerrimum motum producet, ſi fuerit $\mu g m + 28 \mu m f < 28 \nu n$, hoc enim caſu, minima obliquitate celeritas diminueretur.

Coroll. 4.

859. Si igitur euaneſcente s ſimul euaneſcet $\frac{dp}{ds}$ curſu directo nauis celerrime progredietur quamdiu anguli VvC tangens $\frac{\mu}{\nu}$ non excedit hunc limitem $\frac{28 n}{m(28 f + g)}$. At ſi $\frac{dp}{ds}$ non euaneſcat euaneſcenre s curſus obliquus ſemper eſt praeſerendus, niſi ventus a puppi flet.

Coroll. 5.

860. Si ergo fuerit ſaltem pro obliquitatibus minimis $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2 b^2}{r^2 f^2}$, et $u^2 = \sqrt{(s^4 b^4 + r^4 f^4)}$ erit ſi s minimum ſeu infinite paruum $\frac{dp}{ds} = -1 = m$, et $\frac{du}{ds} = 0$, vnde celeritas

leritas etiam maior prodibit ſi prora A in partem oppoſitam rectae GL declinetur. Hoc enim caſu euanſcente s fit $\frac{\sigma}{\rho} < \frac{s}{r}$.

Coroll. 6.

861. At caſu quo fit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sb^2}{rf^2}$, qui magis nauibus congruit erit $\frac{dp}{ds} = \frac{b^2-f^2}{f^2}$ euaneſcente s; Quare cum $b > f$ his caſibus curſus obliquus ſemper erit vſurpandus, niſi ventus directe in curſus directionem incidat.

Scholion.

862. Quanquam in caſu, quo ponitur $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$ in ipſo initio ſeu obliquitatibus minimis p negatiuum induit valorem, tamen quam primum fit $\frac{s}{r} > \frac{f}{b}$ eius valor fit affirmatiuus. Quamobrem etiam in hoc caſu, niſi angulus VvC ſit minimus, obliquitas curſus ad ſuperiorem partem rectae GL erit dirigenda, ſiquidem nauis celerrime debeat progredi. Neglectis igitur anomaliis iſtis, quae tantum in minimis obliquitatibus hoc ſolo caſu ſe offerunt, ad motum velociſſimum obtinendum obliquitas debebit dirigi in ſuperiorem partem lineae GL ita vt angulus AGL, eo modo quo rem ſumus contemplati fiat affirmatiuus. Deinde autem ex circumſtantiis allatis facile colligitur, quo maior ſit angulus VvC eo maiorem capi debere obliquitatem. At obliquitatem nunquam maiorem accipi conuenit quam eſt ea cui reſpondet angulus RnG maximus, ſi igitur iſte angulus obliquitatis AGL pro quo maxima eſt differentia inter angulos MRG et AGL ponatur α graduum, et angulus RnG β graduum, limites intra

intra quos angulus obliquitatis curſus A G L contineri debet erunt o° et $\alpha°$, quorum limitum ille o° locum habet ſi angulus VvC euaneſcat, alter autem ſolus in vſum vocari poteſt quando angulus VvC proxime erit $90+\beta$ graduum, ſi enim angulus VvC maior fuerit quam $90+\beta$ graduum tum nauis nequidem in directione data GL promoueri poteſt, ex quo cum angulo $VvC = 0$ grad. respondeat angulus $AGL = 0$ grad. atque angulo $VvC = 90+\beta$ graduum reſpondeat angulus $AGL = \alpha$ graduum, ſatis prope pro angulis VvC intermediis conuenientes angulos AGL aſſignare licebit, idque eo facilius praeſtabitur ſi pro vno alteroue angulo VvC intermedio per methodum datam angulus AGL aptiſſimus definiatur ſola autem aeſtimatione ad veritatem ſatis prope accedetur, ſi pro angulo VvC continente x gradus capiatur curſus obliquitas $AGL = \frac{\alpha x}{90+\beta}$ graduum vel forte $\frac{\alpha x^2}{(90+\beta)^2}$ graduum, vel generalius $\frac{\alpha x n}{(90+\beta)^2}$ graduum; quae formula in vſum vocari poterit, ſi pro dato quodam angulo VvC angulus A G L maxime congruus actu fuerit determinatus, eo enim exponens n definietur. Anguli autem α et β ex data navis proprietate facile determinabuntur; ſi enim fuerit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$ erit anguli RnG tangens $= \frac{sr(bb-ff)}{s^2b^2+r^2f^2}$; qui ideo erit maximus ſi fuerit $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$; ſeu anguli A GL tangens $= \frac{f}{b}$ Tum autem erit anguli M R B tangens $= \frac{b}{f}$; atque differentiae RnG tangens $= \frac{bb-ff}{2fb}$; ſeu erit $\beta = 90° - 2\alpha$ vnde pro varia relatione inter quantitates ff et bb, quae eam inter ſe rationem habent, quam habet reſiſtentia nauis in directione GA mota ad reſiſtentiam nauis in directione

GE

Digitized by Google

GE mota, anguli α et β cognoſcentur, quod quo facilius pateat ſequentem tabellam adiungere viſum eſt

$bb = ff$	$\alpha = 45°$	$\beta = 0°, 0'$
$bb = 2ff$	$\alpha = 35°, 16'$	$\beta = 19°, 28'$
$bb = 3ff$	$\alpha = 30°, 0'$	$\beta = 30°, 0'$
$bb = 4ff$	$\alpha = 26°, 34'$	$\beta = 36°, 52'$
$bb = 5ff$	$\alpha = 24°, 6'$	$\beta = 41°, 48'$
$bb = 6ff$	$\alpha = 22°, 12'$	$\beta = 45°, 36'$
$bb = 7ff$	$\alpha = 20°, 42'$	$\beta = 48°, 36'$
$bb = 8ff$	$\alpha = 19°, 28'$	$\beta = 51°, 4'$
$bb = 9ff$	$\alpha = 18°, 26'$	$\beta = 53°, 8'$
$bb = 10ff$	$\alpha = 17°, 33'$	$\beta = 54°, 54'$

Cum autem quo maior eſt angulus β, eo magis aduerſus ventum curſus inſtitui queat, liquet quo maior fuerit longitudo nauis reſpectu latitudinis eo magis aduerſus ventum nauigari poſſe; tenet enim ff ad bb proxime rationem latitudinis nauis maximae ad ipſius longitudinem. In nauibus autem vſu receptis proxime eſt $bb = 4ff$, ex quo eae aptae ſunt aduerſus ventum nauigare, ita vt angulus VvI fiat fere $53°, 8'$ ſeu angulus VvC, $126°, 52'$ id quod cum experientia egregie conuenit qua naues obſeruantur ad 11 Rhombos ſeu $123\frac{3}{4}$ gradus dirigi poſſe.

PROPOSITIO 82.
Problema.

863 *Definire curſum a naui inſtituendum, quo celerrime in regionem, ex qua ventus venit prouehatur.* Tab. XXXV. fig. 1.

Solutio.

Sumatur primo ad lubitum obliquitas nauis AGL cuius anguli ſinus ſit s, coſinus $= r$: veniatque ventus in directione Vv pariter data, et quaeratur poſitio lineae GL reſpectu Vv vt curſus in regionem ex qua ventus venit, maxime properetur. Qaeritur ergo angulus VvL cuius ſinus ſit $= \mu$ coſinus $= \nu$. Ex angulo autem obliquitatis curſus dato AGL, dabitur media directio reſiſtentiae RM quae cum directione curſus GL angulum faciat RnG cuius ſinus ſit $= p$ coſinus $= q$. Iam poſitis vt ante celeritate venti $= \sqrt{c}$, planitie velorum $= gg$, et plano reſiſtentiam exprimente $= uu$, erit celeritas qua nauis in directione GL ingredictur $= \frac{(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2su + qg}$; vbi ν fecimus negatiuum, quia angulum VvL acutum ponimus. Cum igitur nauis incedat in directione GL angulum acutum cum directione venti Vv conſtituente, dum ſpatium vL percurrit, in regionem, ex qua ventus venit, acceſſit ſpatio Ll, ducta vl perpendiculari ad directionem venti Vv et Ll ipſi parallela. Hinc nauis hoc curſu ad uentum accedit celeritate $= \frac{\nu(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2su + qg}$ quae maxima eſſe debet. Cum ergo obliquitas curſus AGL data ponatur, differentietur ea ponendis μ et ν variabilibus, atque differentiale ponatur $= 0$: prodibit autem ob $d\nu = -\frac{\mu d\mu}{\nu}$ iſta aequatio $(\mu^2 + \nu^2) p = 2 \mu \nu q$, ex qua oritur $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q+1}{p}$. Quare cum anguli LvV tangens ſit $= \frac{q+1}{p}$ erit angulus ipſe $LvV = 90° - \frac{1}{2} Rng$ ſeu angulus Lvl aequabitur ſemiſſi anguli Rng. Naue itaque ad curſus obliquitatem datam AGL inſtructa, angulus RnG biſecetur recta np, nauisque vento ita obuertatur

tur vt directio venti Vv ad illam rectam np ſit normalis. Quoniam vero eſt $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q+1}{p}$ erit $\mu = \frac{q+1}{\sqrt{(2+2q)}} = \sqrt{\frac{(q+1)}{2}}$, et $\nu = \sqrt{\frac{1-q}{2}}$; vnde celeritas qua nauis ad ventum accedit erit $= \frac{(1-q)g\sqrt{c}}{2(2nu+qg)}$. Si nunc quaeratur angulus obliquitatis curſus AGL, qui reddat hanc expreſſionem $\frac{1-q}{2nu+qg}$ maximam, tum habebitur ille nauis curſus, quo omnium celerrime nauis in regionem venti promouetur. Ante omnia autem intelligitur ex praecedentis problematis ſolutione curſus obliquitatem minorem accipi debere, quam eſt ea, cui angulus RnG maximus reſpondet. Ac ſi ponamus dum $\underline{p}$ creſcit elemento dp, interea creſcere $\underline{u}$ elemento ndp, prodibit anguli RnG tangens $\frac{p}{q} = \frac{2n}{2nu+g}$: quae expreſſio cum maior fuerit, quam tangens anguli RnG, ſi eſt maximus, tum ipſe angulus maximus ſeu proxime minor erit adhibendus. Quouis autem caſu particulari oblato iſta quaeſtionis pars, quae ad ipſius obliquitatis curſus determinationem ſpectat, facile reſoluetur. Q.E.I.

Coroll. 1.

864. Cum angulus VRe, ſub quo ventus in vela irruit ſit complementum anguli nRv ad rectum, aequabitur quoque angulus VRe ſemiſſi anguli GnR eiusque ideo ſinus erit $\sqrt{\frac{1-q}{2}}$.

Coroll. 2.

865. Deinde etiam notandum eſt angulum VvL quem directio venti cum via deſcribenda GL conſtituit cum angulo VRe angulum rectum conficere.

Coroll. 3.

866. Cum celeritas qua nauis verſus ventum appropinquat ſit $= \frac{(1-q)b\sqrt{c}}{2(2nu+fg)}$, manifeſtum eſt celeritatem hanc fore $= 0$, ſi $q = 1$ maximamque ſi $q = 0$ ſeu angulus RnG rectus At cum angulus RnG vltra datum limitem creſcere nequeat, intelligitur maximam fore acceſſionem ad ventum ſi angulus RnG capiatur maximus. Quamobrem obliquitas curſus tanta eſt ſumenda, vt angulus reſpondens RnG a valore ſuo maximo ſenſibiliter non diſcrepet.

Coroll. 4.

867. Si ergo angulus obliquitatis curſus, cui maximus reſpondet angulus RnG, ponatur $= \alpha$, et maximus angulus $RnG = \beta$, debebit angulus AGL aliquantulum minor accipi quam α; ita vt RnG maneat $= \beta$.

Coroll. 5.

868. Ponamus angulum AGL ipſi angulo α aequalem vel aliquantillum minorem capi, erit angulus $RnG = \beta$; vnde ob triangulum Rnv iſosceles fiet angulus $VvL = 90° - \frac{1}{2}\beta$, et angulus VRA, quem plaga venti cum directione ſpinae nauis AB conſtituit erit $= 90 - \alpha \frac{1}{2}\beta$ grad. vel aliquanto maior. Angulus autem quo ventus in vela incidit ſeu Vre erit $= \frac{1}{2}\beta$.

Coroll. 6.

869. Hinc igitur ope tabellae ſupra datae, qua relatio inter α et β continetur, cuiusuis nauis datae curſus ita dirigi poterit, vt iter maxime aduerſus ventum inſtituatur. Scho-

Scholion.

870. In his propoſitionibus aſſumſimus nauem iam habere eam celeritatem, qua a vento ſollicitata ſecundum datam directionem progredi queat; neque ſolliciti fuimus, vnde eam celeritatem acquiſiuerit. Quamobrem etiam iſtae proprietates, quas inuenimus locum non habent, niſi navis iam eam ipſam celeritatem, quam ipſi tribuimus aliunde ſit nacta. Hae ſcilicet propoſitiones reſpiciunt motum vniformem, quo nauis a vento propulſa prouehi poteſt neque ex iis productis et acceleratio motus, ſi nauis vel in quiete fuerit poſita, vel datam celeritatem in data directione habuerit, cognoſci poteſt, ſed iſtas propoſitiones praemitere conueniens viſum eſt quo intelligitur, quomodo nauis, ſi iam quandam celeritatem ſit conſecuta, eam ope venti conſeruare eaque in directum progredi queat. Quare cum haec ſatis ſint explicata, inueſtigabimus quomodo nauis a vento motum accipere eumque augere poſſit: in quo primum erit inquirendum ſi nauis quamcumque iam habeat celeritatem in data directione atque quamuis teneat curſus obliquitatem, quomodo datus ventus in vela vtrunque diſpoſita irruens motum illum afficiat, cum vel augendo vel diminuendo vel directionem ipſam alterando vel denique curſus obliquitatem immutando. Deinde ſi hoc fuerit definitum, licebit eiusmodi quaeſtiones tractare, quibus pro data diſpoſitione nauis et velorum totus motus requiritur, quem nauis a vento ſollicitata accipiet; ex iisque demum iudicari poterit vtrum nauis eiusmodi motum, quem ipſi in his praecedentibus propoſitionibus iam inſitum poſuimus, nanciſci queat, an ſecus? et ſi fieri pote-

rit vt ipſi talis motus concilietur ſimul modus conſtabit, quo eiusmodi motus ſit producendus. In nauigatione quidem praecipue motus vniformis in directum requiritur, qui ſi iam fuerit formatus, quomodo conſeruetur expoſuimus; ſed hoc nullius foret vſus, niſi conſtaret, quanam nauis directione et qua velorum diſpoſitione, ſi nauis primum quieuerit, ea ad eiusmodi motum perennem redigi queat. Deinde vero etiam noſſe oportet, quomodo ex vno motu conſtante alius quicunque datus ſit formandus, cuiusmodi quaeſtiones in nauigatione maximi ſunt momenti.

PROPOSITIO 83.

Problema.

Tab. XXXV. fig. 2.

871. *Si nauis quaecunque* AEBF *curſum teneat obliquum* AGL, *ita vt eius centrum grauitatis* G *motu progreſſiuo ſit praeditum in directione* GL. *Sollicitetur autem haec nauis a vento in directione* VL *flante et in vela* ef *impingente; determinare immutationem tam motus quam obliquitatis curſus inde ortam.*

Solutio.

Sit nauis celeritas progreſſiua, quam eius centrum grauitatis G habet ſecundum directionem GL debita altitudini v ſeu $= \sqrt{v}$. Sitque anguli obliquitatis curſus A GL ſinus $= s$ et coſinus $= r$ poſito ſemper ſinu toto $= 1$. Deinde centrum grauitatis velorum in quo vis venti collecta eſt concipienda ſit in axis AB puncto r exiſtente $Gr = y$; atque velorum poſitio ef cum axe AB conſtituat angulum Are ſeu Brf cuius ſinus ſit $= m$ et coſinus $= n$; planities vero velorum ſit $= gg$. Denique venti celeritas ſit =

Digitized by Google

$= \sqrt{c}$, atque anguli VrB, quem directio venti VrL cum axe nauis AB conſtituit, ſinus ſit $= \mu$ et coſinus $= \nu$. His praemiſſis vis venti habebit directionem $\overline{rs}$ normalem ad ſuperficiem velorum $\underline{ef}$, eritque anguli $A\overline{rs}$ ſinus $= n$ et coſinus $= m$: anguli vero rsG ſinus erit $= nr - ms$, et coſinus $= ns + mr$: et anguli Vrf ſinus erit $= n\mu + m\nu$; anguli tandem Gtf, quem poſitio velorum $\overline{ef}$ cum directione motus GL conſtituit, ſinus erit $= \overline{ns + mr}$; vnde quantitas vis venti erit $= ((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 gg$, ſeu tanti aeris voluminis ponderi erit aequalis. Quare ſi pondus nauis ponatur $= M$, et volumen partis aquae ſubmerſae $= V$ erit ipſa vis venti $= \frac{M((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\,V}$. Sit porro pro hoc curſu obliquo centrum reſiſtentiae R exiſtente $GR = z$; et RM media directio reſiſtentiae, quae cum AB angulum MRG conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$ et coſinus $= \varrho$, erit anguli RnG ſinus $= r\sigma - s\varrho$, et coſinus $= s\sigma + r\varrho$, reſiſtentia vero aequalis ſit illi, quam pateretur ſuperficies plana $\overline{uu}$ eadem celeritate directe contra aquam mota; ex quo vis reſiſtentiae erit $= uuv$, ſeu $=$ ponderi $\frac{Muuv}{V}$. Quamobrem nauis a duabus potentiis ſollicitabitur quarum prior ex vento orta eſt $= \frac{M((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 gg}{784\,V}$ ac nauem pellit in directione rs; poſterior vero eſt vis reſiſtentiae $= \frac{Muuv}{V}$, quae nauem vrget in directione RM. Quo nunc immutatio motus progreſſiui eruatur, vtraque vis in ipſo grauitatis centro applicata eſt cenſenda, vtraque reſoluenda in binas laterales, tangentiales ſcilicet in directione GL ſitas et normales directionem GN tenentes: prodibit autem vis vrgens centrum grauitatis

tatis G in directione G L, ſeu vis tangentialis $= \frac{M(ns+mr)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\,V} - \frac{M(s\sigma+r\rho)uuv}{V}$. At vis vrgens in directione GN ad directionem motus GL normali, ſeu vis normalis erit $= \frac{M(nr-ms)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\,V} - \frac{M(r\sigma-s\rho)uuv}{V}$. Ponatur breuitatis gratia vis tangentialis $= T$ et vis normalis $= N$; et concipiatur centrum grauitatis G ſua celeritate $\sqrt{v}$ progredi per ſpatiolum $Gg = dx$, accelerabitur interea ita vt ſit $dv = \frac{T dx}{M}$. Simul vero a vi normali N cogetur viam rectilineam deſerere, atque lineam Ggl conuexam verſus GL deſcribere, cuius in G radius curuaturae GN erit $= \frac{2Mv}{N}$; ſeu dum elementum $Gg = dx$ percurrit deflectet a curſu GL verſus l angulo $= \frac{N dx}{2Mv}$. Vtraque praeterea vis, ſiquidem neutrius directio per centrum grauitatis G tranſit, conuertere conabitur nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, et vis venti quidem proram A verſus a rotari coget, eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2 y}{784\,V}$. Vis reſiſtentiae contra conuerſionem in plagam oppoſitam producet, proramque A verſus α rotabit eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{M\sigma uuvz}{V}$; ex quo conficietur momentum virium ad proram A verſus a conuertendam $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2 y}{784\,V} - \frac{M\sigma u^2 vz}{V}$ quae quantitas ſi fuerit negatiua, prora in plagam $A\alpha$ circa G agetur Q. E. I.

Coroll. 1.

872. Si ergo ope gubernaculi impedienda ſit conuerſio nauis circa axem verticalem, tanta vis a gubernaculo exerceri debet, cuius momentum reſpectu eiusdem axis

Digitized by Google

axis verticalis aequale ſit et contrarium illi momento ex vi venti et reſiſtentia orto.

Coroll. 2.

873. Si tam centrum virium a vento exceptarum r quam centrum reſiſtentiae R in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis G tranſeuntem incidat, tum vis gyratoria prorſus euaneſcit, nullaque vi opus eſt gubernaculi ad directionem AB conſeruandam.

Coroll. 3.

874. Niſi autem tam y quam z euaneſcat, perſpicuum eſt directionem AB ſine actione gubernaculi conſeruari non poſſe. Nam etiamſi illius momentum fieri poſſit $= 0$, tamen mutata celeritate, id ceſſabit eſſe $= 0$.

Coroll. 4.

875. Si celeritas nauis in G ponatur $= 0$, tum reſiſtentia euaneſcet, atque ventus motum naui imprimet in directione rs: quae cum nunquam cum directione venti Vr angulum acutum conficere poſſit, initium motus non aduerſus ventum inſtitui poterit.

Coroll. 5.

876. Si autem nauis habeat motum in directione GL celeritate Vv, directio motus conſeruabitur, ſi vis normalis N euaneſcit, hoc eſt ſi fuerit $((n\mu + mv)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 g^2 = \frac{784(r\sigma - s\rho)xuv}{nr - ms}$. Si autem illa quantitas maior fuerit quam haec, tum angulus VLλ fiet maior,

 contra

contra vero ſi illa quantitas minor fuerit quam haec, angulus VLλ minor euadet.

Coroll. 6.

877. Niſi ergo talis motus nauis ſit producendus cuius directio GLλ cum directione venti VL conſtituat angulum VL*l* vel rectum vel acutum, eiusmodi motus facile producetur, efficiendo vt prima motus directio *rs* fiat in data directione, id quod fieri poteſt, atque tum vt vis normalis euaneſcat; quod fiet curſum directum inſtituendo.

Coroll. 7.

878. At ſi motus deſideretur aduerſus ventum, ita vt angulus VLλ fiat acutus id initio motus obtineti nequit Quare poſt initium curſus ita dirigi debet vt ſit perpetuo 784 $(r\sigma - s\varrho)u^2v > (nr - ms)((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + m\nu)\sqrt{v})^2 g^2$. Hoc autem commodiſſime obtinebitur, ſi ſaltem circa motus initium vela *ef* teneantur normalia ad curſum praeſentem GL, vel etiam reclinantia vt angulus *rt*L fiat obtuſus. Quando vero iam aliquam celeritatem acquiſiuerit nauis, tum vela pedetentim in eum ſitum diſponi poterunt, qui ad motum aequabilem requiritur.

Coroll. 8.

879. In hoc autem curſu, qui aduerſus ventum inſtitui debet, probe notandum eſt, directionem prorae GA perpetuo intra directiones VL et Lλ eſſe conſeruandam, hincque curſum obliquum eſſe tenendum, quo angulus R*n*G fiat maximus.

Co-

Digitized by Google

Coroll. 9.

880 Si ponatur anguli Vrf ſinus $= \zeta$; ſeu $n\mu + mv = \zeta$ atque anguli rtL ſinus $= \eta$ et coſinus $= \theta$, ita vt ſit $\eta = ns + mr$ et $\theta = nr - ms$; itemque anguli RnG ſinus $= p = r\sigma - s\varrho$ et coſinus $= q = s\sigma + r\varrho$; erit vis tangentialis accelerans $T = \frac{M\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mqu^2v}{V}$ et vis normalis curſum GL verſus l deflectens $N = \frac{M\theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mpu^2v}{V}$.

Coroll. 10.

881. Quo igitur curſus nauis aduerſus ventum quantum fieri poteſt dirigatur, oportet vt ſit, quemadmodum iam monſtrauimus $784pu^2v > \theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2$; ſimulque vt motus acceleretur debet eſſe $\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 p^2 > 784\, qu^2v$: ex quibus multo magis eſſe debet $p\eta > q\theta$ ſeu ang. RnG $>$ rsG. ſiue angulus Rzr debet eſſe acutus.

Coroll. 11.

882. Debebit igitur praeter angulum Rzr acutum quoque eſſe $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} < \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{pv}{\theta}}$; ſimulque $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} > \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{qv}{\eta}}$. Vtrique autem conditioni maxime ſatisfit ſi curſus obliquitas ea accipiatur, cui reſpondet maximus angulus RnG, tum enim p maximum, q vero minimum obtinet valorem.

Scholion

883. Pendet igitur cognitio motus, quem datus ventus datae naui dato modo directae praeter celeritatem venti, velorum quantitatem atque reſiſtentiam praecipue a duobus angulis, primo ſcilicet ab angulo Vrf quem venti

directio cum poſitione velorum ef conſtituit, ſecundo ab angulo rtL, quem directio velorum $e\ f$ cum directione motus GL facit, quorum angulorum differentia eſt obliquitas curſus AGL, qua directio reſiſtentiae nRM ſeu angulus RnG determinatur. Prouti igitur in curſu hi anguli manent conſtantes, vel alteruter, vel vterque variabilis exiſtit, nauis aliam viam deſcribet aliamque in ſingulis locis habebit celeritatem. Maxime autem difficile erit motum definire ſi angulus obliquitatis curſus AGL fuerit variabilis, cum ab eius variatione non ſolum angulus RnG immutetur, ſed etiam ipſa reſiſtentiae quantitas abſoluta quae per $\underline{u}\ \underline{u}$ exprimetur, quorum vtrumque difficile eſt aſſignare, quomodo mutata obliquitate curſus vel augeatur vel diminuatur. Ceterum intelligitur quantum expediat naues ita conſtruere, vt centrum reſiſtentiae pro quaque curſus obliquitate in rectam verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem incidat, hoc enim ſi fuerit praeſtitum, atque inſuper vela in malis ita diſponantur, vt media directio vis, quam recipiunt in eandem verticalem cadat, non ſolum gubernaculi actio tantopere deſiderabitur, ſed etiam leui vi gubernaculum dirigetur, cum nunquam eiusmodi vis occurrat quae nauem conuertere conetur. Praeterea vero etiamſi accidat vt centra, tum reſiſtentiae tum vis venti non praeciſe in eum locum cadant, tamen dummodo diſcrimen ſatis fuerit exiguum, ope gubernaculi curſus quicunque inſtituetur. Quanquam enim gubernaculum aliam vim ſenſibilem non exerit, praeter conuerſionem nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem, tamen ope gubernaculi directio motus vehementer immutatur. Dum enim ope gubernaculi curſus obliquitas muta-

Digitized by Google

mutatur, ſimul media directio reſiſtentiae in aliam plagam conuertitur, quo fit vt ipſa motus directio mox declinetur. Ita actione gubernaculi non ſolum poſitio nauis ſeu axis eius longitudinalis a puppi ad proram ducti afficitur, ſed etiam ipſa directio motus in eam plagam, in quam prora dirigitur, deflectitur ſiquidem naues directe progredientes valde exiguam patiuntur reſiſtentiam reſpectu eius quam ſufferunt, ſi curſu obliquo feruntur. Hancob cauſam gubernaculi actio maxime requiretur, ſi curſus quantum fieri poteſt, ſit contra directionem venti inſtituendus, ope gubernaculi enim efficiendum eſt, vt ea curſus obliquitas conſeruetur, cui maximus angulus R*n*G reſpondeat. Deinde vt motus nauis ſimul maxime acceleretur, atque aduerſus plagam ex qua ventus venit, inflectatur, vela ita ſint continuo diſponenda, vt angulus *r t s* tantus conſeruetur, quantum reliquae circumſtantiae permittunt; quo maior enim eſt angulus *r t s* eo maior erit eius ſinus η contraque eo minor eius coſinus θ, ex quo tum acceleratio maxima obtinebitur, tum etiam maxima curſus declinatio aduerſus ventum. At ſi curſus iam angulum acutum conſtituat cum directione venti, tum vtique angulum *r t s* magis acutum eſſe oportebit, quoniam alioquin ventus vela non impelleret. Quo circa perpetuo effici debebit, vt angulus V*re* tam ſit acutus, quam quantitas vis venti permittit. Cum autem celeritas iam erit facta aequabilis, tum ea curſus directio inſtituenda eſt, quae ſupra pro motu aequabili eſt monſtrata.

PROPOSITIO 84.

Problema.

Tab. XXXVI fig. 1.

884. *Si nauis* AEBF *oblique moueatur in fluuio, cuius curſus ſit* CGD, *ita vt axis nauis* AB *cum directione fluuii* CD *conſtituat angulum obliquum* AGC; *determinare motus mutationem a vi fluuii ortam.*

Solutio.

Sit fluuii celeritas debita altitudini k atque anguli AGC quem axis ſeu ſpina nauis AB cum curſu fluuii CD facit ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$; habeat autem nauis iam motum quo eius centrum grauitatis G celeritate altitudini v debita progrediatur in directione GL quae cum curſu fluminis GD conſtituat angulum LGD cuius ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$. Iam vt alliſio aquae ad ſuperficiem nauis reperiatur, concipiatur totum ſyſtema ex fluuio et naui compoſitum celeritate $\sqrt{v}$ promoueri in directionem ipſi GL contrariam, quo fiet vt fluuius in nauem quiescentem impingat. Sumta ergo $GC = \sqrt{k}$, et $GL = \sqrt{v}$, compleatur parallelogrammum GCKL, atque diagonalis GK repraeſentabit tum directionem quam celeritatem, qua fluuius in nauem quiescentem allidere eſt concipiendus. In triangulo autem GCK datur angulus C, cuius ſinus $= m$ et coſinus $= n$, atque ambo latera $CK = \sqrt{v}$ et $CG = \sqrt{k}$, ex quibus oritur celeritas fluuii in directione IG incurrentis $= \sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}$, atque anguli CGI ſinus $= \frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$, eiusque coſinus $= \frac{\sqrt{k} - n\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$; ex quibus angulus AGI innoteſcit; erit autem anguli AGI ſinus $= \frac{\mu\sqrt{k} - (\mu n + \nu m)\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$, eiusque coſinus $= \frac{\nu\sqrt{k} + (\mu m - \nu n)\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$. Concipiatur

piatur nunc nauis in directione GI in aqua quieſcente promoueri, ſit R centrum reſiſtentiae, et R*m* media directio reſiſtentiae, atque reſiſtentia ipſa ſit tanta, quantam pateretur figura plana *u u* eadem celeritate contra aquam mota: His poſitis nauis ab allapſu fluuii vrgebitur in directione RM, vi, quae aequalis eſt ponderi voluminis aquae $= (k - 2n\sqrt{kv} + v)u^2$, ſeu poſito pondere nauis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$ erit vis fluuii allidentis $= \frac{M(k-2n\sqrt{kv}+v)u^2}{V}$, qua vi nauis ſecundum directionem RM propelletur. Haec igitur vis reſoluta in binas, quarum altera in GL incidit, altera ad GL eſt normalis, dabit cum vim tangentialem, qua motus in directione G L accelerabitur, tum vim normalem, qua motus directio deflectetur *a*GL verſus GD. Denique niſi punctum R, quod eſt centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGI in G incidat nauis ſimul circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum conuertetur et quidem in plagam AEL ſi R inter A et G fuerit ſitum, in plagam contrariam vero ſi punctum R intra B et G cadat; ſi quidem angulus CGI fuerit minor angulo AGC; nam ſi angulus CGI maior foret angulo AGC haec omnia contra ſe haberent. Q. E. I.

Coroll. 1.

885. Si nauis vel quieſcat vel motum habeat ſecundum directionem fluminis GD tum angulus CGI euaneſcet, atque R erit centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGC. Vis conuertens, igitur tendet ad obliquitatem AGC augendam, ſi R intra puncta A et G cadat, contra vero axem AB ſecundum curſus fluminis directionem CD diſponet, ſi R intra G et B cadat.

Co-

Coroll. 2.

886. Si ergo nauis initio directe ſecundum curſus fluminis directionem CD fuerit diſpoſita, eaque aliquantillum declinetur, ſponte ſitum priſtinum recipiet, ſi centrum reſiſtentiae R intra puncta G et B cadat. Econtrario autem ſi R intra G et A fuerit ſitum, directio AB continuo magis a curſu fluminis CD declinabitur.

Coroll. 3.

887. Si igitur pars impulſui fluuii expoſita EAF fuerit ſatis ponderoſa, magnamque vim a fluuio patiatur, tum nauis ſeu corpus quodcunque per fluuium recta deſcendere poterit, quia hoc caſu punctum G ad A accedit, punctum R vero recedit.

Coroll. 4.

888. At ſi pars EAF fuerit perquam acuta et leuis, ita vt centrum reſiſtentiae R prope ad A collocetur, tum difficulter nauis directe per fluuium deſcendet, ſed a minima vi de directione CD depulſa, magis a ſitu directo elongabitur.

Coroll. 5.

889. Eodem vero caſu, quo motus nauis GL incidit in curſum fluuii CD, quoniam angulus GRM maior erit angulo AGC, nauis a ſua directione depelletur, atque ad ripam fluuii, in quam pro A declinat pelletur.

Coroll. 6.

890. Ponamus igitur nauem iam motum accepiſſe verſus ripam in directione GL, atque angulum AGC con-

conſeruari; accelerabitur iſte motus, ſiquidem angulus L r M fuerit acutus, ſimul vero de hac directione deflectetur, verſus GD, ſiquidem angulus LGD maior fuerit quam MRG.

Scholion.

891. Apparet igitur motum corporum a fluuio abreptorum maxime eſſe irregularem, etiamſi ea plano diametrali verticali ſint praedita atque duas partes ſimiles et aequales vtrinque habeant. Primo enim niſi axis AB in ipſam fluuii directionem incidat, corpus verſus eam ripam pellitur, in quam prora A vergit, (conuenit enim eam nauis partem, quae cum aqua confligitur proram appellari); Deinde variis modis corpus ab aqua circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum circumagetur, pro diuerſo ſitu centri reſiſtentiae R, quod durante rotatione continuo locum mutat, niſi pro omni obliquitate ſit fixum. Tertio ob vim normalem ad motus directionem GL a vi fluuii ortam, ipſa motus directio afficitur eaque vel magis declinatur a curſu fluminis vel ad eum reducetur, prout angulus MRG vel maior fuerit vel minor LGD. At vero etiamſi motus verſus fluuii curſum inflectatur, tamen eo recidere nequit, quia minuto angulo LGD eousque vt minor fieret quam MRG, deflexio orietur. Denique tametſi ſemel directio GL parallela foret directioni RM, quo caſu vis normalis euaneſceret, tamen ob corporis conuerſionem vel a vi aquae, vel ab alia leviſſima cauſa ortam, ſtatim alia media directio vis aquae aderit, quae motum turbabit. Interim tamen eiusmodi navis, in qua centrum reſiſtentiae verſus puppim B cadit

 dire-

directe a fluuio abripietur, ſi quidem curſu directo motum inceperit. Corpora autem irregularia, quae nequidem duabus partibus aequalibus et ſimilibus gaudent motu maxime irregulari ferri oportet, ex quo mox ad ripam alterutram deuoluentur. Quod autem ad naues attinet, ope gubernaculi in B applicati motus regularis facile obtinebitur, atque curſus vel ſecundum flumen directe deorſum vel ad ripam inſtitui poterit; ſemper autem motus deſcenſus praeualebit, ex quo fluuius in directione, ad ipſius curſum normali traiici omnino non poteſt; ſed nauis inter traiectum eo magis deorſum abripietur quo celerior fuerit fluminis curſus. Cum vi fluuii nunc alia vis ſollicitans vel remorum vel venti coniungi poſſet, atque determinari, quomodo quisque intentus curſus quam commodiſſime ſit inſtituendus, ſed cum haec propius ad alterum librum reſpiciant, in quo nauigationem nauiumque diſpoſitionem ex profeſſo pertractare eſt conſtitutum, hic plura afferre de iſtiusmodi motibus non eſt viſum, praeſertim cum facile ſit ex methodo tradita huiusmodi quaeſtiones, quae proponi queant, ad calculum reuocare atque reſoluere. Supereſt igitur vt paucis exponamus motum nauium quae non ſunt liberae, ſed alicubi alligatae, quae doctrina in traiectu fluuiorum ſine vi aliena praecipue eſt vtilis.

PROPOSITIO 85.
Problema.

Tab. XXXVI. fig. 2.

892. *Si nauis* AD *in fluuio ſecundum directionem* Z V *fluente, ope funis* IZ *puncto firmo* Z *ita fuerit alligata, vt perpetuo reſpectu funis* IZ *eandem poſitionem teneat, id* quod

quod factum concipiatur per funem BO, *punctum nauis* B *cum* O *connectentem*; *determinare motum*, *quem curſus fluminis iſti naui imprimet.*

Solutio.

Ponemus ante omnia partem nauis aquae ſubmerſam eſſe parallelepipedum, quia alioquin vires quas fluuius in diuerſis poſitionibus exerit, difficulter inter ſe comparari poſſent. Sit itaque ABDC ſectio aquae quae erit rectangulum, cuius latus AB ſit $= a$, latus AC $= b$, et profunditas nauis in aqua $= c$, erit ſuperficies in AB vim fluuii excipiens $= ac$, et ſuperficies ſub AC infra aquam verſans $= bc$. Sit porro fluuii celeritas debita altitudini k atque longitudo funis ZI $= f$, quae vehementer magna ſit reſpectu quantitatum a, b, et e; ſitque anguli ZIA ſinus $= m$ et coſinus $= n$. Quod nunc ad motum huius nauis attinet, intelligitur nauem alium motum habere non poſſe praeter gyratorium circa punctum Z, quo punctum I in arcu circulari PVQ, cuius centrum eſt Z; feretur. Ponamus autem nauem motum in P inchoaſſe, atque percurrendo arcum PVQ perueniſſe in ſitum ABLC, in quo punctum I celeritatem habeat altitudini v debitam, qua conabitur per arcum IVQ progredi. Ponitur inſuper anguli IZV, quem poſitio funis IZ cum directione fluuii ZV conſtituit, ſinus $= x$ et coſinus $= y$. His praemiſſis conſideremus vim fluuii, quam in nauem exercebit. Ac primo quidem irruet in latus AB cuius area eſt $= ac$ in directione ME ſub angulo MEA $=$ ZIA $+$ IZV, cuius anguli igitur ſinus erit $= my + nx$, coſinus vero $= ny - mx$ qui coſinus ſimul eſt ſinus anguli NHI ſub quo fluuius in

latus AC impingit. Iam ſi nauis quieſceret, vis fluuii ſponte haberetur, at cum nauis iam motum habere ponatur, reperietur vis, quam fluuius in latus $AB = ac$ exeret, in directione EF normali ad AB in eius puncto medio E, $= ac((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$: vis vero quam lateri AC imprimet in directione HG ſimili modo erit $= bc((ny - mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Poſito autem pondere nauis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$, expreſſiones inuentae, ſi per $\frac{M}{V}$ multiplicentur, dabunt pondera his viribus aequiualentia. Hinc igitur orietur momentum harum duarum virium coniunctim ad nauem circa polum Z circumagendam in plagam $IVQ = \frac{Macnf}{V}((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcmf}{V}((ny - mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$, quod diuiſum per momentum ipſius nauis reſpectu poli Z, quod ob longitudinem f maximam eſt $= Mff$ dabit vim gyratoriam. Ponamus ergo nauem per elementum arcus ds verſus V progredi, erit $ds = \frac{-fdx}{y}$; atque interea ita motus accelerabitur vt ſit $V\,dv = \frac{-nacdx}{y}((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 + \frac{mbcdx}{y}((ny - mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Ad motum autem ipſum cognoſcendum ſufficit aduertiſſe conuerſionem in plagam VQ continuare quamdiu fuerit $ank(my + nx)^2 > bmk(ny - mx)^2$ ſeu tangens ang. $MEA > \sqrt{\frac{bm}{an}}$; qui terminus oritur ſi ponatur $v = 0$. Nam ſi nauis habet motum in directione IV, eo progredietur ſiue accelerato ſiue retardato; ſin autem alicubi quieſcat, tum vi fluuii propelletur in eandem directionem a P ad Q. Si igitur vbique inter P et Q fuerit tang. $MEA > \sqrt{\frac{bm}{an}}$, tum nauis ex P egreſſa ad Q vsque pertinget, quae omnia abunde ſufficiunt ad motum cognoſcendum. Q. E. I. Co-

Coroll. 1.

893. Si nauis perueniat vltra V in ſitum $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{d}\ \underline{e}$ omnia manebunt vt ante, praeterquam quod anguli $\bar{V}\bar{Z}\bar{i}$ ſinus poni debeat $= -x$. Ita vis nauem in i vlterius verſus Q vrgens erit vt $an((my-nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2-bm((ny+mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$.

Coroll. 2.

894. Motum ergo hunc vltra V verſus Q continuabit, quoad fuerit $na(my-nx)^2 > mb(ny+mx)^2$ ſeu tang. $\underline{m}\ \underline{e}\ \underline{a} > \sqrt{\frac{mb}{na}}$. Sit angulus cuius tangens eſt $\sqrt{\frac{mb}{na}}$, $= \bar{\alpha}$, fiet $\underline{m}\ \underline{e}\ \underline{a} > \alpha$ ſeu $ZIA - VZi > \alpha$. Quo igitur nauis ad Q vsque peruenire queat, oportet vt angulus VZQ non maior ſit quam $ZIA - \alpha$.

Coroll. 3.

895. Si ponamus porro motum nauis circa polum Z in P inchoaſſe, quo eiusmodi motus per V ad Q vsque continuetur neceſſe eſt vt ſit $PZV + ZIA > \alpha$, denotante $\underline{\alpha}$ angulum cuius tangens eſt $\sqrt{\frac{mb}{na}}$: niſi enim hoc fuerit, motus nequidem incipere poterit; hic autem omnes angulos ponimus acutos, alias tangentes accipere oportet.

Coroll. 4.

896. Si recta ZV per medium fluuium tranſeat, atque requiratur vt nauis ita a ripa P ſponte ad ripam Q fluuium transeundo appellat, oportebit vt ſit ang. VZQ $=$ ang. ZIA $-$ ang. α. Si enim ang. VZQ minor foret, tum nauis ad Q ingenti vi appelleret, quod eſt euitandum.

Coroll. 5.

897. Si ergo detur fluuii latitudo PQ, atque tam ipſa ſpecies nauis, quam angulus AIZ, ex illa aequalitate inuenta reperietur longitudo funis ZV ad traiectum requiſita, indeque punctum Z in medio flumine accipiendum cui nauis eſt alliganda.

Coroll. 6.

898. Si ponatur ſemiſſis latitudinis fluuii $PS = QS = b$: et interuallum $ZS = z$, angulique QZV ſinus x, coſinus y, erit $\frac{b}{z} = \frac{x}{y}$. cum igitur ſit $\sqrt{\frac{mb}{na}} = \frac{my - nx}{ny + mx}$; erit $mz\sqrt{na} - nb\sqrt{na} = nz\sqrt{mb} + mb\sqrt{mb}$, hincque $ZS = z = \frac{b(n\sqrt{na} + m\sqrt{mb})}{m\sqrt{na} - n\sqrt{mb}}$; ac longitudo funis $ZV = f = \frac{b\sqrt{(na + mb)}}{m\sqrt{na} - n\sqrt{mb}}$.

Coroll. 7.

899. Perſpicuum autem eſt ante omnia eſſe debere $m\sqrt{na} > n\sqrt{mb}$, ſeu $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$ ſiue $\frac{b}{a} < \frac{m}{n}$. Ducta ergo in rectangulo ABDC diagonali BC angulus ZIA maior eſſe debebit quam angulus ABC. Ceterum perinde eſt in quonam puncto rectae AB funis alligetur.

Coroll. 8.

900. Quo nauis ceteris paribus celerrime a ripa P ad ripam Q pertingat, efficiendum eſt vt acceleratio in puncto medio V fiat maxima. At ſi nauis in V quieſceret, foret vis eam verſus Q pellens vt $m^2na - mn^2b$, quae quantitas ſit maxima ſi poſito $\frac{m}{n} = t$ fuerit $at^3 - 2bt^2 - 2at + b = 0$

Co-

Coroll. 9.

901. Quoniam autem longitudo nauis a multum excedit latitudinem b, erit circiter $t = \frac{m}{n} = \sqrt{2} + \frac{3b}{4a}$. Hancobrem expediet angulum AIZ accipere 60° circiter, ſi quidem propemodum latitudo b fuerit triens vel quadrans longitudinis a. Hocque ipſo multum excedet angulus AIZ angulum ABC.

Coroll. 10.

902. Si figura nauis fuerit quadrata vt ſit $b = a$, fiet $t = \frac{m}{n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ſeu angulus AIZ erit 69°, 6′; vnde fit $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. Hincque porro prodit longitudo funis $= f = b\sqrt{(15+6\sqrt{5})} = 5, 331 b$. angulusque VZQ fit 10°, 48′.

Coroll. 11.

903. Si angulus AIZ ſeu eius tangens t detur, reperietur commodiſſima ratio longitudinis nauis a ad latitudinem b, ex hac aequatione $\frac{b}{a} = \frac{t^3-2t}{2tt-1}$: ex qua intelligitur neceſſario eſſe debere $tt > 2$ ſeu angulum AIZ maiorem quam 54°, 45′, fit autem ſponte $t > \frac{b}{a}$ vti requiritur. Erit vero $f = \frac{t(1+tt)\sqrt{(tt-1)}}{t\sqrt{(2tt-1)}-t\sqrt{(tt-2)}}$.

Coroll. 12.

904. Si conſtituatur angulus AIZ ſexaginta graduum ſeu $t = \sqrt{3}$, ſatis commoda figura nauis prodibit, orietur enim $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ſeu b ad a vt 53 ad 153 proxime. Deinde longitudo funis ZV reperietur $= f = \frac{4b\sqrt{2}}{\sqrt{15}-\sqrt{2}}$

=

$= \frac{b(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ſeu proxime $f = 2,64222\,b$ ſiue $\frac{f}{b} = \frac{37}{14}$. Angulus vero PZQ erit 44°, 28′.

Scholion.

905. Modus hic fluuium ſine remis et velis traiiciendi admodum eſt commodus et ad vſum accommodatus, cum facile ſit eas conditiones adimplere, quibus traiectio non ſolum poſſibilis, ſed etiam celerrima reddatur. Imprimis autem commendandus eſt caſus in vltimo corollario erutus, pro quo funis non adeo longus requiritur atque proportio inter longitudinem nauis $AB = a$ et latitudinem $AC = b$, valde commode reperta eſt; fere ſcilicet longitudo tripla prodiit latitudinis. Facile autem perſpicitur cum traiectus a ripa P vsque ad ripam Q fuerit peractus, quomodo viciſſim a Q ad P curſus ſit inſtituendus; funes ſcilicet ZI et OB in altero latere CD affigendi. Verum quo haec transmutatio facilius fieri queat, expediet punctum I in ipſo puncto H aſſumere quo obtinebitur, vt in reditu non opus ſit hunc funem deligari alioque loco firmare; perinde enim eſt quo loco I capiatur. Deinde notandum eſt funem BO tam longum eſſe accipiendum, vt angulus quem directio funis ZI cum KH producta conſtituet ſit 60 graduum. Punctum O autem neque nimis propinquum puncto I neque nimis ab eo remotum accipi debet, ne minima funis OB elongatione angulus AIZ notabiliter diminuatur; minime autem angulus AIZ immutabitur ſi capiatur $OI = IB$. Denique etiamſi elongatione funis BO angulus AIZ quantitatem aſſignatam ammittat, tamen ſtatim remedium afferri poterit

de

Digitized by Google

de quo non opus eſt plura monere. Progredior itaque ad motum nauium in fluuio determinandum, quae quidem vt ante circa punctum fixum ſunt mobiles, ſed poſitionem ſuam reſpectu funis non tenent conſtantem; ſcilicet mobiles eas ponam circa ambo puncta Z et I libere.

PROPOSITIO 86.

Problema.

906. *Si nauis* ABDC *in fluuio ope funis* IZ *ita puncto fixo* Z *ſit alligata, vt non ſolum circa punctum* Z *ſed etiam circa punctum* I *in quo funis naui eſt annexus, ſit mobilis; determinare motum huius nauis ab alliſione fluuii oriundum.* T. XXXVII. fig. 1.

Solutio.

Repraeſentet recta ZV directionem fluuii, ſitque celeritas fluuii debita altitudini k: naui vero iterum tribuamus figuram vt ante cuius ſectio quaeuis horizontalis ſit parallelogrammum rectangulum ABDC: Sitque longitudo $AB = a$, latitudo $AC = b$, et profunditas ſub aqua $= c$. Punctum I vero, in quo funis naui eſt affixus ſit in latere AB, ponaturque $EI = i$. Verſetur nunc nauis in ſitu ABDC, quo anguli AIZ ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$, hicque motum habeat progrediendi per arcum IVQ centro Z deſcriptum, cuius radius ſeu longitudo funis IZ ſit $= f$; angulique IZV, quem directio funis cum curſu fluminis conſtituit ſinus ſit $= x$, coſinusque $= y$, ac celeritas puncti I debita ſit altitudini v. His praemiſſis erit ex ſolutione praecedentis problematis vis quam fluuius lateri AB in directione EF imprimit $= \frac{ac((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2}{kkk}$ vis vero, quam

latus

latus AC in directione HK excipiet, erit $= bc((ny+mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Nunc cum nauis ſit mobilis circa punctum I, nauis eiusmodi ſitum acceperit neceſſe eſt, quo momenta virium reſpectu puncti I ſeie deſtruant. Eſt vero momentum prioris vis reſpectu puncti I $= aci((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$, et momentum alterius contrarie agens $= \frac{bbc}{2}((ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Quamobrem habebitur iſta aequatio $\frac{(my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v}}{(ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v}} = \frac{b}{\sqrt{2ai}}$, ex qua aequatione valor ipſarum m et n indeque angulus AIZ, ad quem nauis ſponte ſe compoſuit. Momentum porro harum virium ad nauem circa polum Z conuertendam per arcum IVQ erit vt ante $= \frac{Macfn}{V}((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcfm}{V}((ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$ poſito pondere nauis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$. Per priorem vero conditionem haec formula ſimplicior euadit, proditque ob $V = abc$ momentum conuerſionis circa $Z = \frac{MF}{bb}(bn-2im)((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$; quamdiu igitur erit $bn > 2im$ conuerſio ſecundum IVQ accelerabitur. At prior aequatio euoluta dat $m = \frac{by\sqrt{k} - x\sqrt{2cik} + \sqrt{2aiv}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$ atque $n = \frac{-y\sqrt{2aik} + bx\sqrt{k} - b\sqrt{v}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$. Ex his fit $((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 = \frac{bb(k-2x\sqrt{kv}+v)}{b^2+2ai}$; atque $bn-2im = \frac{(b^2+2i\sqrt{2ai})(x\sqrt{k}-\sqrt{v}) + by(\sqrt{2ai}-2i)\sqrt{k}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$. Nauis igitur tamdiu in arcu IVQ progredi perget quoad fuerit $b^2x + 2ix\sqrt{2ai} + by\sqrt{2ai}\,2biy > 0$, id quod per ſe ita ſe habet, antequam nauis ad V pertingit. At cum vltra medium fluvii erit progreſſa, peruaeneritque in ſitum $abdc$, anguli VZi ſinus erit negatiuus; Quare ſi ponatur etiam anguli VZi ſinus $= x$ et coſinus $= y$, nauis in arcu VQ eousque progredietur, quoad fuerit $by\sqrt{2ai} - 2biy > b^2x + 2ix$

$2ix\sqrt{2ai}$: Vltimus igitur terminus erit punctum Q, exiſtente anguli QZV tangente $= \frac{b\sqrt{2ai}-2bi}{b^2+i\sqrt{2ai}}$: ſiue angulus QZV erit exceſſus duorum angulorum, quorum maioris tangens eſt $\frac{b}{2i}$ minoris vero tangens $= \frac{b}{\sqrt{2ai}}$; quae ad motum cognoſcendum ſufficiunt. Q. E. I.

Coroll. 1.

907. Si punctum I in ipſo puncto A capiatur ita vt ſit $i = \frac{a}{2}$, nauis *e* puncto P egreſſa non vltra punctum V pertinget; fiet enim hoc caſu anguli QZV tangens $= 0$.

Coroll 2.

908. Simili modo nauis non vltra punctum V progredietur, ſi fuerit $i = 0$, ſeu ſi punctum I in quo funis alligatur in puncto medio lateris AB capiatur: ex quo manifeſtum eſt dari punctum I inter A et E e quo nauis funi alligata vltra V maxime progrediatur.

Coroll. 3.

909. Si autem quaeratur locus puncti I, quo angulus VZQ fiat maximus, reperitur iſta aequatio $(bb+4ii)\sqrt{a} = (2bb+4ai)\sqrt{2i}$ ſeu haec $16ai^4-32a^2i^3-24ab^2i^2-8b^4i+ab^4 = 0$ quae dat $b^2 = \frac{12ai^2 \pm 4i(2i-a)\sqrt{2ai}}{a-8i}$; debet igitur eſſe $a > 8i$ ſeu $EI < \frac{1}{8} AB$.

Coroll. 4.

910. Si ſumatur $a = 18i$ fiet $b^2 = \frac{648}{10} i^2$ ſeu $b = \frac{18i}{\sqrt{5}} = 8,05i$ vnde fit $a:b = \sqrt{5}:1$: et $EI = \frac{1}{9} AE$, hincque anguli VIQ prodit tangens $= \frac{3\sqrt{5}}{10}$, ſeu angulus VZQ erit 22°, 45: vnde ex data fluuii latitudine longitudo funis determinabitur.

Coroll. 5.

911. Quo minor accipitur EI pars ipſius AB eo minor prodit latitudo nauis AC; atque ſi punctum I prorſus in E incidat, tum latitudo AC omnino euaneſcet. Omnia igitur puncta I quibus nauis vltra V progredi poterit, continentur inter E et punctum quoddam intra E et A ſitum cuius diſtantia ab E eſt octaua pars longitudinis AB.

Scholion.

912. Hoc igitur etiam modo ſine remis et velis traiectus per fluuium inſtitui poterit; at ingentem cautionem adhiberi oportet tam in figura nauis idonea eligenda quam in punctis Z et I inueniendis, in quibus funis ZI eſt firmandus. Ponamus enim eiusmodi nauem, eligi cuius longitudo AB ſe habeat ad latitudinem vt $\sqrt{5}$ ad I, punctum I in quo funis alligari debet, ita aſſumendum erit vt diſtet a puncto medio E longitudinis AB interuallo AI $= \frac{1}{11}$ AB. Deinde ſi ponatur latitudo fluuii $PQ = 2b$ haec latitudo biſecari debet in S vt ſit $PS = QS = b$; anchoraque in Z firmanda eſt, vt ZS ſit perpendicularis ad PQ, atque interuallum ZS tantum accipi oportet vt angulus SZP ſeu SZQ fiat $22°, 45'$. Erit igitur ZS $= b \cdot 2,3847 = \frac{31}{13} b$ proxime; atque longituto funis ZP $= b \cdot 2,5859 = \frac{75}{29} b$ proxime. Abſoluto autem tranſitu per fluuium ex P in Q contra ex Q in P peruenietur, alligando funem in lateris CD puncto e regione ſito inter C et F quod ab F diſtet interuallo $= \frac{1}{11}$ CD. Hicque modus praxi videtur eſſe conuenientiſſimus.

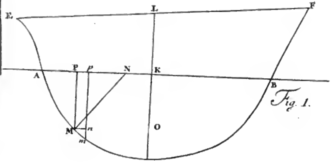


Fig. 1.

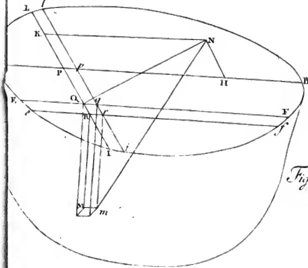


Fig. 2.

Tab. I.

Digitized by Google

Digitized by Google

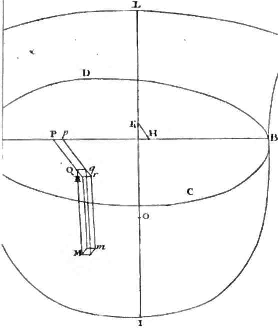


Fig. 1.

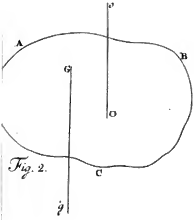
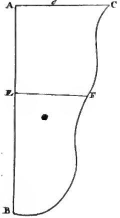


Fig. 2.

Fig. 3.



Tab. II.

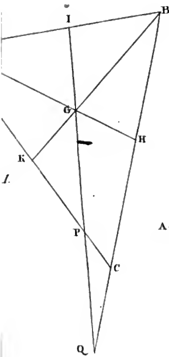
Digitized by Google



Tab. III.

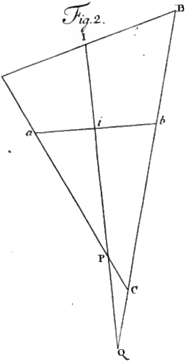
Digitized by Google

Digitized by Google



1.

Fig. 2.



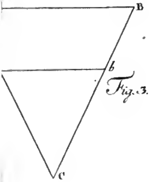
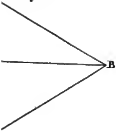


Fig. 3.

Tab. II.

Digitized by Google

Fig. 1.



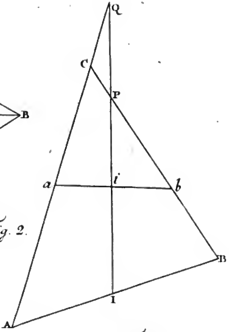
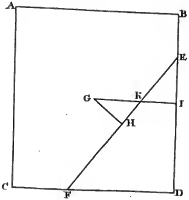


Fig. 2.

Fig. 4.



i.3.



Tab. V.

Digitized by Google

Digitized by Google

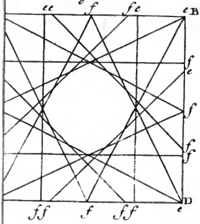


Tab. VI.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.



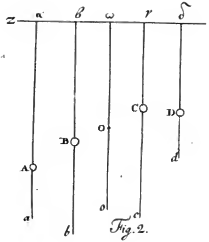


Fig. 2.

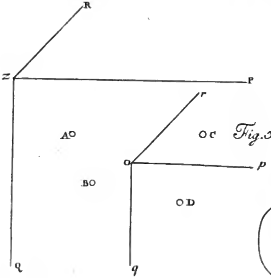


Fig. 3.

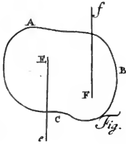


Fig. 4.

Tab. VII.

Digitized by Google

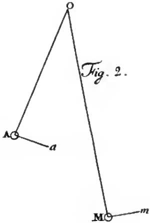


Fig. 2.

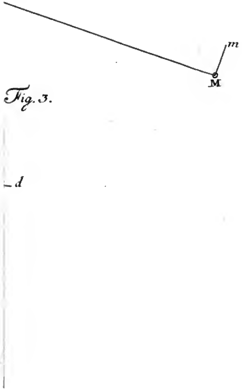


Fig. 3.

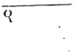
Tab. VIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.



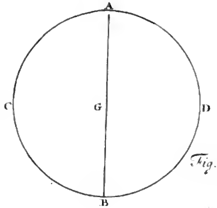
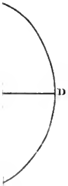


Fig. 2.



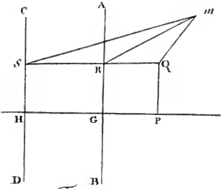


Fig. 4.

Tab. X.

Google

Fig. 1.

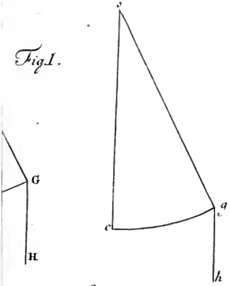
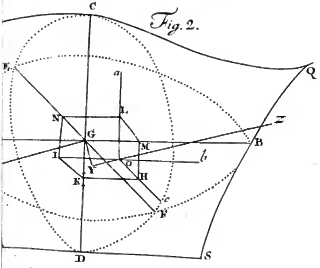


Fig. 2.



Tab. XI.

Digitized by Google

Digitized by Google

456

Digitized by Google

Digitized by Google

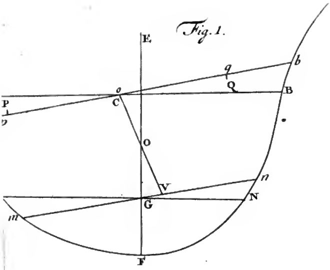


Fig. 1.

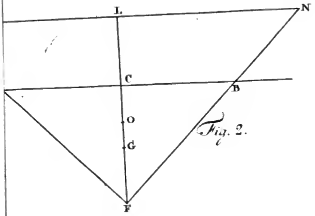


Fig. 2.

Tab XIII.

Digitized by Google

Digitized by Google



Fig. XV.

Digitized by Google

Digitized by Google

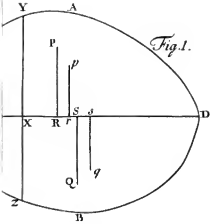


Fig.1.

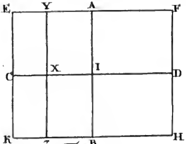
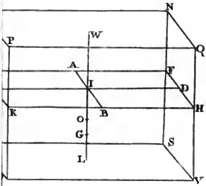


Fig. 2.



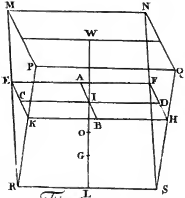


Fig. 4.

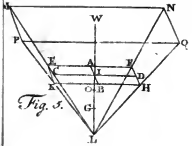


Fig. 5.

Tab.XVI.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

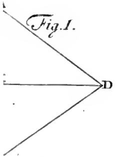
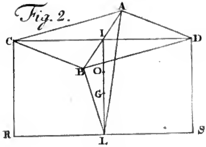
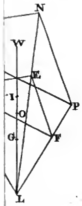


Fig. 2.







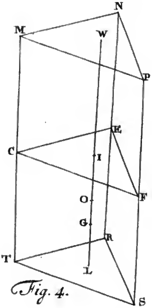


Fig. 4.

Tab XVII.

Digitized by Google

N

D

S



Pl. XVIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

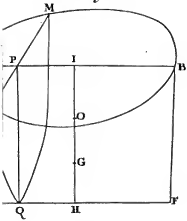


Fig. 2.

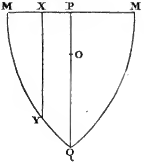
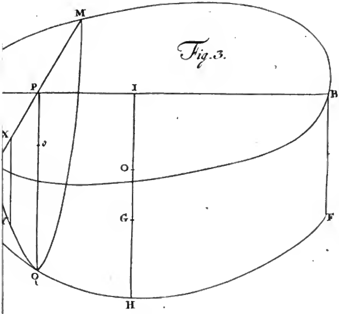


Fig. 3.



Tab. XVIIII.

Digitized by Google

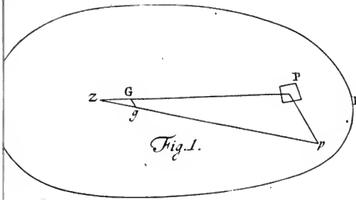


Fig. 1.

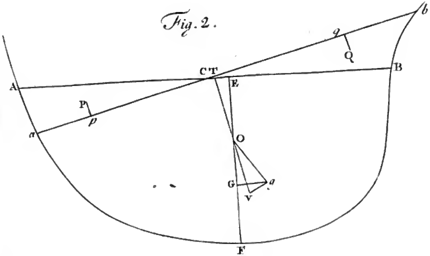


Fig. 2.

Digitized by Google

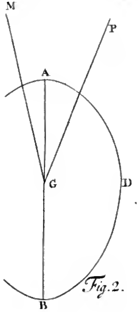
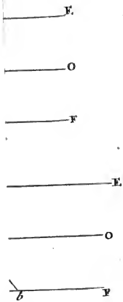


Fig. 2.

Tab XXI.

Digitized by Google

Digitized by Google



3.

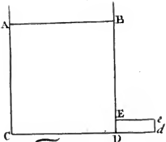


Fig. 2.

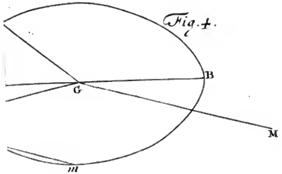


Fig. 4.

Tab XXII.

Digitized by Google

Digitized by Google

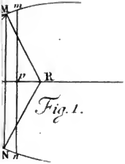


Fig. 1.

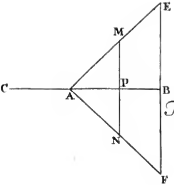


Fig. 2.

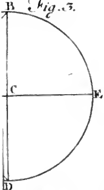


Fig. 3.

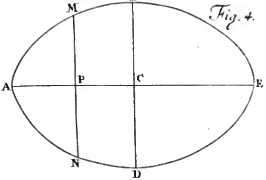


Fig. 4.

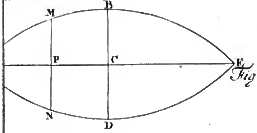


Fig. 5.

Tab XXIII.

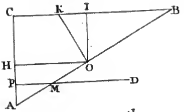
Digitized by Google



Tab. XXIIII.

Digitized by Google

Fig. 2.





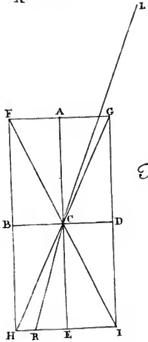
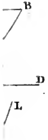


Fig. 4.



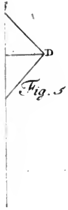


Fig. 5

Tab XXV.

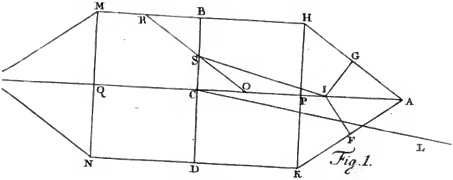


Fig. 1.

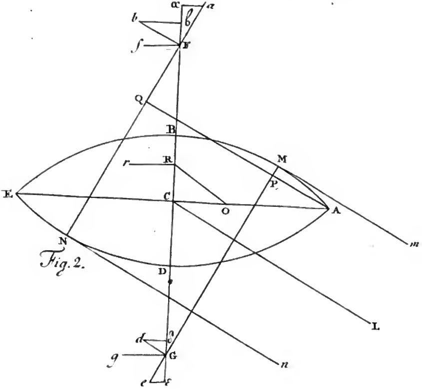


Fig. 2.

Tab. XVI.

Digitized by Google

Digitized by Google

471

VII.

Digitized by Google

Digitized by Google

n 1.158

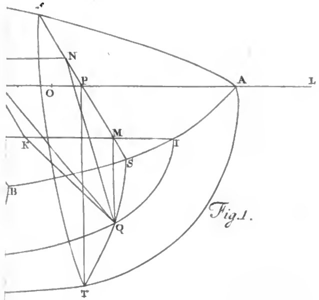
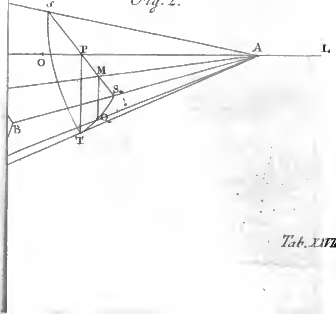


Fig. 1.

Fig. 2.



Tab. XXVIII.

Digitized by Google

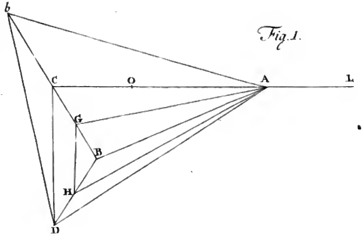


Fig. 1.

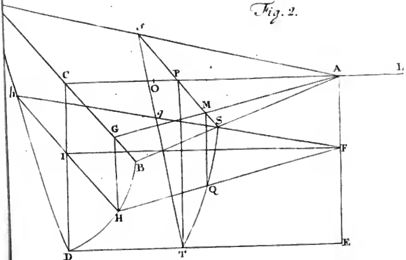


Fig. 2.

Tab. XXIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

474

XXX.

Digitized by Google

Digitized by Google

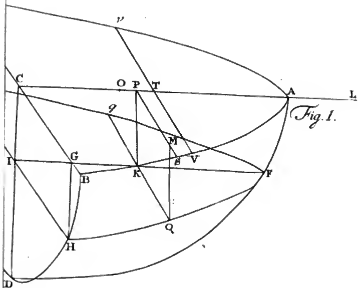


Fig. 1.

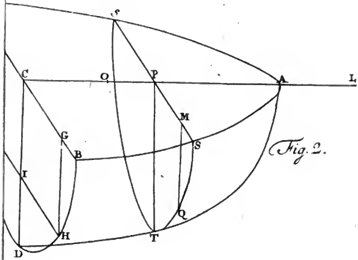


Fig. 2.

Tab. XXXI.

Digitized by Google

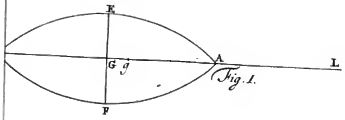


Fig. 1.

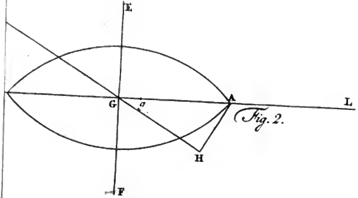


Fig. 2.

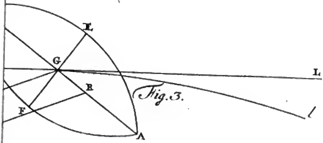


Fig. 3.

Tab. XXXII.

Digitized by Google

L

L

Tab. XXXIII

Digitized by Google

Digitized by Google

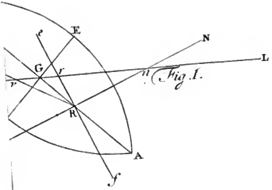


Fig. 1.

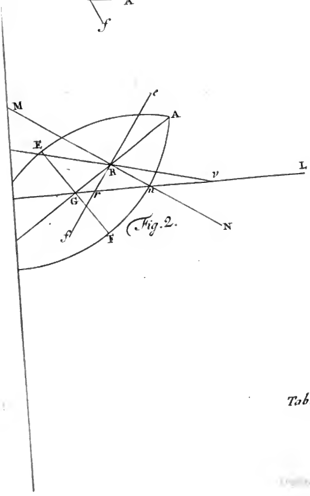


Fig. 2.

Tab. XXXIIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

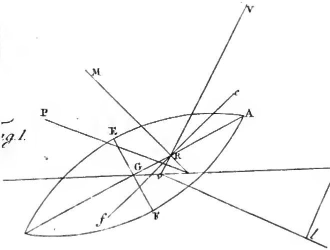
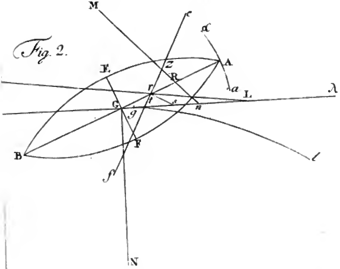


Fig. 2.



Tab. XXXV.

Digitized by Google

Digitized by Google

480

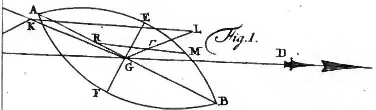


Fig. 1.

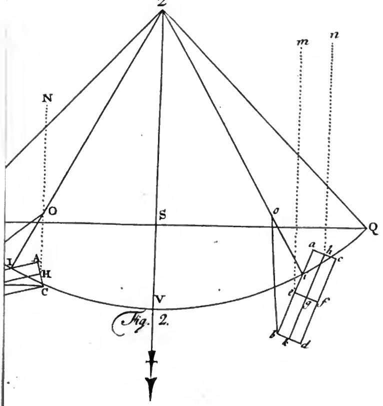


Fig. 2.

Tab. XXXVI.

Digitized by Google

Digitized by Google



Tab. XXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

00562835 9

Digitized by Google

Digitized by Google